CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

O. ONICESCU

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

Prof. O. ONICESCU

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI 1956

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

CÎMP DE EVENIMENTE, MĂSURĂ ŞI PROBABILITATE

§ 1. Cîmp de evenimente

1. O *experienţă* naturală sau provocată se realizează prin ceea ce vom numi *probe.*

Rezultatul diferitelor probe efectuate în condiţii pe care considerăm că sîntem în drept să le numim identice, poate fi totdeauna acelaşi, un eveniment unic. Intoarcem, de pildă, în modul prescris, comutatorul unei lămpi electrice aşezată într-un circuit prin care cu trece curent, lampa se aprinde. Deschidem robinetul de la conducta de apă, apa curge.

Acestea sînt tipuri de experienţe ale căror rezultate sînt evenimente determinate şi unice, evenimente necesare.

Există numeroase experienţe la ale căror probe rezultatele pot fi evenimente diferite.

Intr-o cutie se găseşte un număr de bile de aceeaşi mărime, dar de diferite culori. Printr-un orificiu al ei poate ieşi, atunci cînd el se deschide, o bilă care are una dintre culorile existente în cutie. Se pot produce deci mai multe evenimente, dacă numim eveniment apariţia unei bile de culoare determinată.

Intr-o centrală telefonică se aprind un număr de lămpi — chemări la telefon — într-un interval de timp t. Intr-un alt interval de timp, egal însă cu t, se aprinde un alt număr de lămpi. Dacă numim eveniment numărul de chemări la telefon într-un interval de timp dat, avem aici o experienţă la care probe diferite dau evenimente diferite.

Una dintre experienţele curente în fizică este aceea de măsurare a unei lungimi. Probe diferite ne dau pentru aceeaşi lungime rezultate diferite, deci evenimente diferite. Fiecare

Scanned with OKEN Scanner

eveniment este constatarea coincidenței între un anumit reper și o diviziune a unui instrument de măsurat.

Așa se prezintă lucrurile în fizica macroscopică. In fizica corpusculară, însă, o mărime nu este, în genere, susceptibilă de o singură valoare. Probele menite să dea valoarea unei mărimi dau un spectru de valori, aceasta făcînd abstracție de variabilitatea de care aminteam mai sus în însăși operația de măsurare.

Printr-o mică deschidere se lasă să treacă un fascicul de electroni într-o încăpere și se înregistrează rezultatul difracției și al fenomenelor ulterioare pe un perete opus orificiului. Vom considera în acest caz, drept eveniment, numărul de electroni care cad pe o bandă oarecare delimitată pe perete.

Aceste exemple, care dau o imagine foarte incompletă a multiplicității de moduri în care se pot prezenta evenimentele asociate unei experiențe, ne vor servi drept suport pentru o formulare matematică a noțiunii de sistem de evenimente asociat unei experiențe determinate.

2. Folosind aceste exemple și cele pe care fiecare cititor le poate preciza din domeniul propriu de preocupări, se constată următoarele: evenimentele corespunzătoare unei experiențe sînt determinate și pot fi diferențiate de alte evenimente aparținînd altor experiențe.

In cadrul oricărei experiențe există perechi de evenimente astfel alese că unul dintre ele îl implică pe celălalt. Dacă, de exemplu, bilele din primul exemplu au culorile albă, neagră, roșie, evenimentul care consistă în faptul că a ieșit o bilă de culoare albă implică evenimentul care consistă în faptul că a ieșit o bilă de culoare *nu* neagră, implică de asemenea evenimentul care constă în faptul că a ieșit o bilă de o culoare oarecare, — ceea ce numim, în genere, *evenimentul total* sau *sigur*.

Evenimentul care constă în faptul că în intervalul t s-au produs n semnalizări este implicat în evenimentul: „în intervalul t s-au produs n semnalizări, în intervalul t' s-au produs n' semnalizări“ și implică evenimentul sigur: „într-un interval oarecare de timp se produce un număr de semnalizări“.

In fiecare dintre experiențele considerate, dacă A și B sînt două evenimente distincte, trebuie considerate ca evenimente ale aceleiași experiențe următoarele două:

evenimentul „A sau B“

și

evenimentul „A și B“.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm numai că, pentru ca această observație să fie universal valabilă, trebuie să completăm sistemul evenimentelor cu *evenimentul imposibil*, pe care îl vom nota cu simbolul Φ.

Bila care a căzut din urnă este sau albă sau neagră: să notăm acest eveniment cu F.

Dacă notăm cu G evenimentul: sau bilă albă sau bilă roșie, evenimentul: și F și G este, evident, bila albă.

Evenimentul bilă albă și bilă neagră, cînd este vorba de experiența căderii unei singure bile, este evenimentul imposibil.

Pentru evenimentul „A sau B“ se introduce notația mai comodă $A \cup B$. Ca operație de constituire a unui nou eveniment, $A \cup B$ este *comutativă* și *asociativă*:

$$1) \qquad A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

și, în plus, are proprietatea

$$2) \qquad A \cup \Phi = A.$$

Operația „A și B“, pe care o vom nota cu $A \cap B$, are de asemenea proprietățile:

$$3) \qquad A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

dar

$$4) \qquad A \cap \Phi = \Phi.$$

Să observăm în același timp că

$$5) \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

In fiecare dintre experiențele citate, odată cu un eveniment A este bine caracterizat evenimentul *non* A, pe care-l vom numi, înlăuntrul sistemului de evenimente, *contrariul* lui A. Vom nota îndeobște A' sau $\complement A$, în loc de non A.

Evenimentul „A sau non A“ este evenimentul sigur al experienței. Il vom nota în genere cu E:

$$A \cup \complement A = E.$$

Să adăugăm două observații caracteristice pentru oricare sistem complet de evenimente corespunzătoare unei experiențe:

„A și B“ implică A; „A și B“ implică B;

A implică „A sau B“; B implică „A sau B“.

Scanned with OKEN Scanner

Cu notațiile indicate mai sus și introducînd pentru *implicație* semnul $\subset$, relațiile precedente devin:

6) $$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,$$

7) $$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B.$$

La acestea adăugăm ca simple completări

8) $$A \subset E, \quad \Phi \subset A$$

pentru orice A.

Să mai observăm că orice eveniment care implică pe A și pe B, implică evenimentul „A și B“:

9) $$C \subset A, \quad C \subset B \rightarrow C \subset A \cap B,$$

după cum, dacă D este implicat și de A și de B, el este implicat de evenimentul „A sau B“:

10) $$A \subset D, \quad B \subset D \rightarrow A \cup B \subset D.$$

3. Din exemplele date și consecințele lor, deducem o caracterizare matematică valabilă pentru oricare dintre sistemele de evenimente care corespund unei experiențe, sisteme pe care le vom numi cîmpuri de evenimente.

Un *cîmp de evenimente* este o mulțime ordonată de evenimente cu următoarele proprietăți:

1°. Evenimentul sigur E și evenimentul imposibil Φ fac parte din cîmp.

2°. Dacă A este un eveniment al cîmpului, există evenimentul $A' = \complement A$ cu proprietățile:

$$A \cup A' = E, \quad A \cap A' = \Phi.$$

3°. O dată cu A și B fac parte din cîmp evenimentele $A \cup B$ și $A \cap B$, operațiile de compunere $\cup$ și $\cap$ avînd proprietățile 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 9) și 10), unde simbolul $\subset$ corespunde implicației evenimentelor.

4°. O dată cu evenimentele A_j $(j = 1, 2, \ldots, \infty)$ există și face parte din cîmp evenimentul $\bigcup_j A_j$ (sau A_1, sau $A_2, \ldots$).

4. Nu justificăm restricția care urmează: vom considera ca obiecte ale teoriei probabilităților numai *acele cîmpuri E de evenimente* pe care le vom numi *atomistice* și care se pot interpreta în următorul mod:

E corespunde unei mulțimi de puncte, sau atomi ireductibili, reprezentînd ceea ce vom numi *evenimentele elementare ale cîmpului.*

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare eveniment A al cîmpului corespunde unei părți din E, deci unei submulțimi de evenimente elementare.

Cîmpul însuși se reprezintă ca un sistem $\mathcal{K}$ de părți din E, avînd proprietățile 1°, 2°, 3°, 4° — de rîndul acesta în înțelesul teoriei mulțimilor de puncte, unde $\cup$ este *reuniunea*, iar $\cap$ este *intersecția* a două mulțimi, $\subset$ fiind *inclusiunea*.

Vom nota cîmpul de evenimente cu $\mathcal{G}$, iar corespunzătorul său atomistic cu $\{E, \mathcal{K}\}$.

Observație. Dacă experiența conduce la un singur eveniment E, cîmpul $\mathcal{G}$ este compus din E și evenimentul imposibil Φ. Pe acest cîmp se pot verifica toate proprietățile 1°, 2°, 3°, 4°.

In expunere se vor trata mai întîi cîmpurile care au un număr finit de evenimente — ceea ce nu implică ca E să fie o multime finită de evenimente elementare — și apoi cîmpurile cu o mulțime infinită de evenimente. Pentru cele dintîi, 4° este o consecință a primelor trei axiome, de aceea nu va figura în caracterizarea acestor cîmpuri.

§ 2. Măsura și probabilitatea evenimentelor unui cîmp

1. *Definiție. Se numește măsură a evenimentelor unui cîmp de evenimente o funcție* $m(A)$ *de aceste evenimente cu următoarele proprietăți:*

$$m(A) \geq 0, \qquad (j)$$

$$m(\Phi) = 0, \qquad (jj)$$

$$m\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j m(A_j), \qquad (jjj)$$

dacă $A_j \cap A_k = \Phi$, $j \neq k$; $j, k = 1, 2, \ldots, \infty$.

Ultima proprietate, numită *aditivitate totală a măsurii*, implică aditivitatea finită, deoarece dacă luăm $A_{l+1} = A_{l+2} = \ldots = \Phi$, atunci (jjj) devine

$$m\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j m(A_j); \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

2. *Măsuri finite.* Dintre diferitele funcții care dau măsura evenimentelor unui cîmp vom reține numai pe acelea pentru care $m(E)$ este finită. In acest caz, $m(A)$ este de asemenea finită, pentru orice eveniment A al cîmpului.

In adevăr, după 2° există A', complementara mulțimii A, cu proprietățile $A \cup A' = E$, $A \cap A' = \Phi$. Dar atunci

$$m(A) + m(A') = m(E),$$

deci, ținînd seama de (j),

$$m(A) \leq m(E).$$

3. *Măsură condiționată.* Un mod de a construi o nouă măsură finită, plecînd de la o măsură dată $m(A)$, este definit de următoarea formulă:

$$m_\Omega(A) = \frac{m(A \cap \Omega)}{m(\Omega)},$$

unde $\Omega \in \mathcal{F}$, $m(\Omega) \neq 0$. Această măsură a evenimentului A, *condiționată de evenimentul* Ω, are proprietățile (j), (jj), (jjj).

Deoarece $E \cap \Omega = \Omega$, rezultă că m_Ω este o măsură finită și anume

$$m_\Omega(E) = 1.$$

4. *Probabilitate pe un cîmp de evenimente. O măsură $m(A)$, pentru care $m(E)=1$, se numește probabilitate a cîmpului de evenimente dacă $m(A)$ are o semnificație structurală caracteristică pentru acest cîmp de evenimente.* Pentru un cîmp de evenimente geometric, de exemplu, această măsură trebuie să aibă o semnificație geometrică, să fie deci un invariant față de grupul de transformări propriu geometriei corespunzătoare. Dacă este vorba de evenimente fizice, această măsură trebuie să reprezinte o mărime fizică specifică experienței și cîmpului de evenimente respectiv.

In același timp, dacă, așa cum se va lămuri în ultimul capitol al acestui volum, frecvența evenimentului A posedă o anumită stabilitate, aceasta poate servi la alegerea convenabilă a acelei măsurări care reprezintă probabilitatea.

In cele ce urmează vom considera numai experiențele ale căror cîmpuri de evenimente posedă o măsură care poate avea semnificația unei probabilități. Alegerea acestei măsuri este, însă, de competența științei speciale în care se înglobează experiența respectivă.

CAPITOLUL II

CÎMP FINIT DE PROBABILITATE

Un cîmp de probabilități este finit dacă mulțimea evenimentelor cîmpului este finită.

Experiența nu prezintă, în general, direct astfel de cîmpuri. Ele constituie însă, în numeroase împrejurări, o bază pentru construirea cîmpului de probabilități indicat de experiență.

In experienţa extragerilor repetate dintr-o urnă care are o structură dată — a bile albe (A) şi b bile negre (B) — evenimentele elementare sînt şirurile infinite de bile albe şi negre — de exemplu, $BAABA\ldots$ aşa cum se prezintă într-o succesiune nelimitată de extracţii. Cîmpul de evenimente nu este finit. El este însă generat de cîmpul finit de probabilitate în care evenimentele elementare sînt A şi B cu probabilităţile $p(A)$ şi $p(B)$.

De cele mai multe ori, cîmpul de bază nu este, ca în cazul precedent, dat de experienţa imediată. El se construieşte ipotetic, uneori chiar prin analogie cu experienţa extracţiilor dintr-o urnă şi numai după aceea se verifică experimental buna sa alegere. In biologie, ca şi în fizică, experienţele de tipul extragerilor repetate pot fi macroscopice, cel mai adesea însă experienţele de verificare *directă* a structurilor unui cîmp ipotetic de bază — în general finit — sînt de ordin microscopic.

§ 1. Definiţii

1. Un *cîmp finit de evenimente este constituit de mulţimea* $\mathcal{K}=P(E)$ *a părţilor unei mulţimi finite* E *de evenimente elementare* $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Observăm că, în afară de părţile (submulţimile) propriu-zise ale lui E, fac parte din $\mathcal{K}$ şi următoarele evenimente:

a) fiecare dintre *evenimentele elementare* $e_1, e_2 \ldots, e_m$, considerate ca părţi ale lui E: $e_g \in \mathcal{K}$;

b) mulţimea E, care reprezintă *evenimentul sigur*: $E \in \mathcal{K}$:

c) mulţimea vidă, care reprezintă *evenimentul imposibil*: $\Phi \in \mathcal{K}$.

Ţinînd seama de definiţia cîmpului $\mathcal{K}$, evenimentele au următoarele proprietăţi:

1°. Dacă $A \in \mathcal{K}$, complementara A' a mulţimii A în $\mathcal{K}$ face de asemenea parte din $\mathcal{K}$.

A şi A' sînt *evenimente contrarii*; putem spune încă $A'=$ $=\text{non}A$; sau $A=\text{non}\ A'$. Proprietatea 1° se mai enunţă:

O dată cu A, *din cîmpul de evenimente face parte şi contrariul său* (non A).

Observăm cu acest prilej că $\Phi=\text{non}\ E$, $E=\text{non}\ \Phi$; evenimentul sigur şi evenimentul imposibil sînt contrarii.

2°. Dacă $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, atunci

$$C=A \cup B \in \mathcal{K};\quad D=A \cap B \in \mathcal{K}.$$

Evenimentele A și B pentru care $A \cap B \neq \Phi$ se numesc *compatibile*; dacă însă $A \cap B = \Phi$, evenimentele A și B sînt *incompatibile*.

2. *Desfacerea* unei mulțimi oarecare E în componente incompatibile este realizată de o familie de părți $A_i (i \in I)$, unde I este o mulțime finită de indici, cu proprietățile:

$$A_i \cap A_j = \Phi \quad j \neq i; \; j \in I; \quad \bigcup_{i \in I} A_i = E,$$

Adăugăm următoarea observație:

Fiind dată o mulțime oarecare E, orice desfacere finită $E_1, E_2, \ldots, E_m$ a lui E poate constitui spațiul evenimentelor elementare $(e_1 = E_1, \; e_2 = E_2, \ldots, e_m = E_m)$ ale unui cîmp finit de evenimente.

Reciproc, fiind dat un cîmp finit de evenimente $\mathcal{K}$, putem construi un spațiu E pentru care evenimentele elementare $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ale lui $\mathcal{K}$ să constituie o desfacere în evenimente incompatibile.

Relația între $\{E, \mathcal{K}\}$ și E prezintă un deosebit interes atunci cînd fiecare dintre ele are o semnificație experimentală sau teoretică.

3. *Probabilitatea* cîmpului finit de evenimente $\{E, \mathcal{K}\}$ este o *funcție* $P(A)$, definită pentru fiecare eveniment A din $\mathcal{K}$ și are următoarele proprietăți:

$$P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{K}, \tag{i}$$

$$P(E) = 1, \tag{ii}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{iii}$$

dacă $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, $A \cap B = \Phi$.

Din (iii) și (ii) rezultă imediat că, $A' = \text{non } A$ fiind evenimentul contrariu lui A, vom avea

$$P(A') + P(A) = P(E) = 1,$$

deci

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{1}$$

In particular,

$$P(\Phi) = 1 - P(E) = 0. \tag{2}$$

Probabilitatea evenimentului sigur fiind, după (ii), egală cu unu, probabilitatea evenimentului imposibil este egală cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Din (iii) și ținînd seamă de asociativitatea operației de reuniune, rezultă că, dacă $A_1, A_2, \ldots, A_l$ sînt evenimente incompatibile din $\mathcal{K}$, vom avea:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_l). \qquad (3)$$

Demonstrația se face prin recurență și este imediată.

Orice eveniment A posibil (deci $A \neq \Phi$) este, prin definiție, reuniunea unui număr de evenimente elementare:

$$A = e_{i_1} \cup e_{i_2} \cup \ldots \cup e_{i_l}. \qquad (4)$$

Deoarece evenimentele elementare sînt incompatibile două cîte două, vom avea, potrivit cu (3),

$$P(A) = P(e_{i_1}) + P(e_{i_2}) + \ldots + P(e_{i_l}). \qquad (5)$$

Folosind notația

$$P(e_j) = p_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

formula (5) devine

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_l}.$$

Prin urmare, probabilitățile evenimentelor unui cîmp sînt determinate o dată cu probabilitățile p_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ ale evenimentelor elementare; probabilitatea evenimentului posibil A este suma probabilităților evenimentelor elementare care-l compun.

Singurele condiții generale pe care le verifică probabilitățile p_j sînt:

$$p_j \geq 0; \qquad \sum_{j=1,2,\ldots,m} p_j = 1. \qquad (j)$$

Din (4) și (5) rezultă următoarea proprietate:

Dacă $A \supset B$, atunci $P(A) \geq P(B)$.

4. *Cîmp finit de probabilitate.* Sistemul $\{E, \mathcal{K}, P\}$ — în care E este o mulțime finită de evenimente elementare, $\mathcal{K}$ este mulțimea părților lui E completată cu E, Φ și evenimentele elementare, iar P este probabilitatea definită după regulilede la punctul 3 — se numește *Cîmp finit de probabilitate.*

E fiind dat, $\mathcal{K}$ este determinat, deci cîmpul mai depinde de alegerea a m numere pozitive p_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, legate prin relația $\sum p_j = 1$, $(j = 1, \ldots, m)$.

Experienţa sau teoria respectivă a evenimentelor specifice care compun mulţimea E trebuie să indice alegerea valorilor p_j. Teoria matematică a probabilităţilor poate numai ajuta teoria statistică — fizică sau biologică — în această alegere.

5. *Subcîmp de probabilitate.* Vom nota $\mathcal{G}=\{E, \mathcal{K}, P\}$ şi $\mathcal{G}'=\{E', \mathcal{K}', P'\}$ două cîmpuri de probabilitate şi vom pune

$$\mathcal{G}' \subset \mathcal{G},$$

dacă E' este format din elementele $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1}$ $(m_1 < m)$ ale unei desfaceri a lui E, apoi $\mathcal{K}'$ este format din E' aşa cum $\mathcal{K}$ a fost format din E, şi $p_j' = P(E_j)$.

Este evident că $\mathcal{G}'=\{E', \mathcal{K}', P'\}$ constituie un cîmp de probabilitate identic cu $\mathcal{G}$ dacă $m_1 = m$, deoarece în acest caz avem, în mod necesar, $E_1 = e_1$, $E_2, = e_2, \ldots, E_m = e_m$ (întrucît ordinea nu interesează).

6. *Cîmp finit de probabilitate pentru care probabilităţile evenimentelor elementare sînt egale.* In acest caz, $P(e_j) = p_j = p$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Condiţiile (j) ne arată că

$$p = \frac{1}{m}$$

şi

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

unde $m(A)$ este *numărul evenimentelor elementare cuprinse în A.*

7. *Cîmp finit de probabilitate $\mathcal{G}$ pentru care probabilităţile sînt numere raţionale.* Dacă probabilităţile evenimentelor elementare $p_j = P(e_j)$ sînt numere raţionale, există un cel mai mic întreg M pentru care

$$p_j = \frac{m_j}{M} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \ \sum m_j = 1).$$

Putem atunci construi un cîmp $\mathcal{G}_M$ format din M evenimente elementare egal probabile e_j^l $(l = 1, 2, \ldots, m_j; \ j = 1, 2, \ldots, m; \ \sum m_j = M)$, astfel ca să putem considera

$$e_j = e_j^1 \cup e_j^2 \cup \ldots \cup e_j^{m_j}.$$

Cîmpul $\mathcal{G}$ dat este, în acest mod, un subcîmp al lui $\mathcal{G}_M$.

Este evident că, în cazul în care probabilităţile p_j nu sînt toate raţionale, nu există un cîmp finit $\mathcal{G}_M$ căruia $\mathcal{G}$ să-i fie subcîmp.

Scanned with OKEN Scanner

8. *Urnele ca modele teoretice pentru cîmpurile de probabilităţi raţionale.* Unui cîmp de probabilitate în care $p_j=\frac{m_j}{M}$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ îi corespunde o urnă conţinînd km_j bile de culoarea j $(j=1, 2, \ldots, m)$, deci în total $\sum km_j=kM$ bile, k fiind un întreg pozitiv. Numerele p_j, pe care le considerăm drept probabilităţi, caracterizează *structura urnei din punctul de vedere al repartiţiei culorii bilelor ei.*

Vom examina mai tîrziu de ce şi în ce condiţii este justificată denumirea de probabilităţi pe care o dăm acestor constante de structură.

Evenimentele elementare pentru urna dată sînt diferitele bile ale urnei.

Evenimentele caracteristice E ale urnei sînt în număr de m şi se pot prezenta intuitiv ca: bila de culoarea j $(j=1, 2, \ldots, m)$. Fiecare dintre aceste evenimente este reuniunea evenimentelor elementare care corespund fiecărei bile de culoarea j. Probabilitatea evenimentului E este p_j de mai sus.

§ 2. Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente

1. *Definiţia probabilităţii condiţionate.* Formularea matematică a relaţiilor de dependenţă sau independenţă între evenimente are la bază noţiunea de probabilitate condiţionată.

Să presupunem că probabilitatea evenimentului A a cîmpului finit de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$ este diferită de zero. Funcţia

$$P_A(X)=\frac{P(X\cap A)}{P(A)} \tag{1}$$

se numeşte *probabilitatea condiţionată* a evenimentului X (de evenimentul A).

Este evident că $P_A(X)$, ca funcţie de evenimentul X, are proprietăţile (i), (ii), (iii). Prin urmare, $\{E, \mathcal{K}, P_A\}$ este un *cîmp finit de probabilitate.*

Din (1) rezultă imediat

$$P(X\cap A)=P(A)\,P_A(X). \tag{2}$$

Observăm că, în cîmpul determinat de P_A, avem aplicînd (1)

$P_A(X)_B$ adică $P_A(X)_B=\frac{P_A(B\cap X)}{P_A(B)}$.

Prin urmare, folosind încă o dată (1):

$$(P_A(X))_B = \frac{P(A\cap B\cap X)}{P(A)} \cdot \frac{P(A)}{P(A\cap B)} = \frac{P(A\cap B\cap X)}{P(A\cap B)},$$

de unde

$$(P_A(X))_B = P_{A\cap B}(X). \tag{3}$$

Cu ajutorul acestei formule și al formulei (2) se demonstrează imediat, prin inducție, formula fundamentală:

$$P(X_1\cap X_2\cap \ldots \cap X_n) =$$

$$= P(X_1)\, P_{X_1}(X_2)\, P_{X_1\cap X_2}(X_3)\ldots P_{X_1\cap X_2\cap \ldots \cap X_{n-1}}(X)_n. \tag{4}$$

In adevăr, după (2):

$$P(X_1\cap X_2\cap \ldots \cap X_n) = P(X_1)\, P(X_2\cap X_3\cap \ldots \cap X_n).$$

Aplicînd (3), vom avea mai departe

$$P_{X_1}(X_2\cap X_3\cap \ldots \cap X_n) = P_{X_1}(X_2)\, P_{X_1\cap X_2}(X_3\cap X_4\cap \ldots \cap X_n).$$

Continuînd cu aplicarea formulei (3), obținem în cele din urmă formula (4).

Probabilitățile condiționate reciproc de două evenimente A și B, ale căror probabilități absolute $P(A)$, $P(B)$ sînt diferite de zero, vor fi legate prin relația evidentă

$$P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A). \tag{5}$$

2. *Independența a două evenimente.* Vom defini deocamdată independența a două evenimente. Mai departe, vom introduce noțiunea de independență a evenimentelor unui sistem de mai multe evenimente și vom verifica că definiția introdusă aici intră în definiția generală.

Definiție. Evenimentul X este independent de evenimentul A [pentru care $P(A)\neq 0$], dacă probabilitatea lui X condiționată de A este egală cu probabilitatea absolută a lui X, adică

$$\frac{P(X\cap A)}{P(A)} = P(X). \tag{6}$$

Deci, dacă X este independent de A, avem:

$$P(X\cap A) = P(X)\, P(A). \tag{7}$$

Relația de independență este deci simetrică.

Dacă $P(A)=0$, este evident că $P(X\cap A)=0$, deci relația (5) este verificată pentru orice X.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera un eveniment A, pentru care $P(A)=0$, ca independent de orice alt eveniment. Cu această extindere, *independența evenimentelor A și X este întotdeauna caracterizată de relația* (7).

Observație. Dacă A și B sînt independente, evenimentele A și $B'=$ non B, $A'=$ non A și B, A' și B' sînt, respectiv, independente.

Să arătăm, de exemplu, că

$$P(A\cap B')=P(A)\,P(B').$$

Aceasta rezultă din șirul de egalități

$$P(A\cap B')=P(A\cap(E-B))=P(A-A\cap B)=P(A)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)-P(A)\,P(B)=P(A)\,[1-P(B)]=P(A)\,P(B'),$$

în care am ținut seama de independența dintre A și B și de (1) din § 1. Se demonstrează în același mod că:

$$P(A'\cap B)=P(A')\,P(B),$$

$$P(A'\cap B')=P(A')\,P(B').$$

Exemplu. Fie

$$U(a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad V(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

un sistem de două urne conținînd, cea dintîi, a_1 bile de culoarea α_1, a_2 bile de culoarea $\alpha_2, \ldots, a_m$ bile de culoarea α_m. Pentru cea de a doua vom avea $b_1, b_2, \ldots, bm$ bile de culorile respective $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$.

Evenimentele elementare sînt perechile de bile $\alpha_i\beta_j$, unde α_i este una oarecare dintre cele $l=a_1+a_2+\ldots+a_m$ bile ale urnei U și β_j una oarecare dintre cele $n=b_1+b_2+\ldots+b_m$ bile ale urnei V. Avem deci, în total, ln evenimente elementare. Fiecăruia îi atribuim probabilitatea $\frac{1}{ln}$.

Notăm prin F_j evenimentul: bila de culoare j din urna U, iar prin G evenimentul: bila de culoare k din urna V.

Evenimentele care prezintă un interes deosebit sînt $F_j\,G_k$ $(j, k=1, 2, \ldots, m)$, sau reuniuni de astfel de evenimente. Evenimentul $F_j\,G_k$ are probabilitatea $\frac{a_jb_k}{ln}=p_jq_k$, dacă punem $\frac{a_j}{l}=p_j$, $\frac{l_j}{n}=q_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$. Vom nota cu F evenimentul total (o bilă oarecare) pentru urna U și cu G evenimentul total pentru urna V.

Evenimeteie F_jG, FG_k sînt independente pentru orice j și k $(j, k=1, 2, \ldots, m)$. În adevăr.

$$F_jG\cap FG_k=F_jG_k.$$

Prin urmare,

$$P(F_jG\cap FG_k)=P(F_jG_k)=p_jq_k=P(F_jG)\,P(FG_k),$$

deoarece

$$P(F_jG)=p_j;\quad P(FG_k)=q_k.$$

La acest fapt se referă expresia întrebuințată în mod obișnuit: urnele U și V sînt independente.

Teorema lui Bayes. Să considerăm o desfacere a evenimentului total E în evenimente incompatibile $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A_j \cap A_k = \Phi; \qquad \bigcup A_j = E.$$
$$j, k=1, 2, \ldots, m;\ j\neq k \qquad j=1, 2, \ldots, n$$

Avem evident pentru orice eveniment X, o desfacere corespunzătoare în evenimente incompatibile

$$X=(A_1\cap X)\cup(A_2\cap X)\cup,\ldots,\cup(A_n\cap X).$$

Prin urmare,

$$P(X)=P(A_1\cap X)+P(A_2\cap X)+\ldots+P(A_n\cap X).$$

Aplicînd (2), această egalitate devine

$$P(X)=P(A_1)\,P_{A_1}(X)+P(A_2)\,P_{A_2}(X)+\ldots+P(A_n)\,P_{A_n}(X). \quad (8)$$

Porivit cu (1. vom avea, ținînd seama de (8), relația

$$P_X(A_j)=\frac{P(A_j\cap X)}{P(A_1)\,P_{A_1}(X)+P(A_2)\,P_{A_2}(X)+\ldots+P(A_n)\,P_{A_n}(X)}, \quad (9)$$

cunoscută sub numele de *teorema lui Bayes.*

§ 3. Variabile aleatorii

1. *Se numește variabilă aleatorie a cîmpului finit de probabilitate* $\{E, \mathcal{K}, P\}$ *o funcție* $f(\xi)$ *cu valori reale, determinată pentru fiecare eveniment elementar* $\xi=e_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ *din* E.

Teoremă. Fiecare variabilă aleatorie $f(\xi)$ *determină o desfacere a lui* E *în evenimente incompatibile.*

In adevăr, fie $x_1, x_2, \ldots, x_l$ cele l valori distincte ale funcției $f(\xi)$. Avem, cum se vede imediat, $l\leqslant m$. Vom numi E_h mulțimea evenimentelor elementare ξ pentru care $f(\xi)=x_h$:

$$E_h=\{\xi \mid f(\xi)=x_h\}.$$

Este evident că

$$E_h\cap E_k=\Phi, \qquad \bigcup E_h=E.$$
$$h\neq k \qquad h=1, 2, \ldots, l$$

Fiecare dintre mulțimile E_h are o probabilitate $P(E_h)$; foarte adesea vom întrebuința, pentru prescurtare, expresia: $P_h=P(E_h)$ este *probabilitatea valorii* x_h, în loc de expresia exactă: *este probabilitatea evenimentului pe care* $x=f(\xi)$ *ia valoarea* x_h și vom scrie

$$P_h=P\{x=x_h\}.$$

2. *Valoarea medie* $M[x]$ sau $M[f(\xi)]$ sau încă $\bar{x}$ a variabilei aleatorii $x=f(\xi)$ este dată de egalitatea

$$\bar{x}=M[f(\xi)]=\sum_{h=1,2,\ldots,l} P_h x_h. \qquad (1)$$

Proprietăți ale valorii medii:

1°. Dacă $f(\xi)\equiv a$ este o constantă, avem, potrivit definiției,

$$M[f(\xi)]=a,$$

deoarece probabilitatea valorii unice a este 1.

2°. O dată cu $f(\xi)$ și $af(\xi)$ este o variabilă aleatorie ale cărei valori $ax_1, ax_2, \ldots, ax_m$ au respectiv probabilitățile

$$P_1=P(E_1),\quad P_2=P(E_2),\ldots,P_m=P(E_m).$$

Prin urmare,

$$M[af(\xi)]=\sum_{h=1,2,\ldots,m} P_h x_h = a\sum_{h=1,2,\ldots,m} P_h x_h = aM[f(\xi)].$$

3°. *Valoarea medie a sumei a două variabile aleatorii* $x=f(\xi)$, $y=g(\xi)$ *este suma valorilor medii*:

$$M[f(\xi)+g(\xi)]=M[f(\xi)]+M[g(\xi)].$$

Pentru demonstrarea acestei egalități, să notăm cu $F_1, F_2, \ldots, F_l$; $G_1, G_2, \ldots, G_m$ desfacerile corespunzătoare variabilelor $f(\xi)$, $g(\xi)$:

$$F_h=\{\xi \mid f(\xi)=x_h\},\qquad h=1,2,\ldots,l,$$
$$G_k=\{\xi \mid g(\xi)=y_k\},\qquad k=1,2,\ldots,m.$$

Variabila aleatorie $h(\xi)=f(\xi)+g(\xi)$ determină desfacerea ale cărei evenimente incompatibile sînt

$$F_h\cap G_k=\{\xi \mid f(\xi)=x_h,\ g(\xi)=y_k\},\quad h,k=1,2,\ldots,m.$$

Valoarea medie a variabilei $f+g$ va fi

$$M[f+g]=\sum_{h,k}P[F_h\cap G_k](x_h+y_k)=$$

$$=\sum_{h,k}x_hP[F_h\cap G_k]+\sum_{h,k}y_kP(F_h\cap G_k)=\sum_h x_h\sum_k P(F_h\cap G_k)+$$

$$+\sum_k y_k\sum_h P(F_h\cap G_k)=\sum_h x_hP(F_h)+\sum_k y_kP(G_k)=M[f]+M[g],$$

deoarece

$$\sum_k P(F_h\cap G_k)=P(F_h\cap(\bigcup_k G_k))=P(F_h),$$

$$\sum_h P(F_h\cap G_k)=P((\bigcup_h F_h)\cap G_k)=P(G_k).$$

3. *Momente.* O dată cu $x=f(\xi)$, este o variabilă aleatorie și $g(x)$, unde g este o funcție reală oarecare de x; $g(x)$ ia valoarea $g(x_h)$ pe mulțimea E_h, deci cu probabilitatea P_h.

Valoarea medie a acestei variabile aleatorii

$$\overline{g(x)}=\sum_{h=1,2,\dots,l}P_hg(x_h)=M_g[x] \tag{2}$$

se numește *momentul g al variabilei aleatorii* $x=f(\xi)$.

In particular, dacă $g(x)=x^n$, cu n întreg oarecare, avem *momentul de ordinul n* al variabilei

$$M_n[x]=\sum_{h=1,2,\dots,l}P_hx_h^n. \tag{3}$$

Dacă $g(x)=|x|^n$ avem *momentul absolut* de ordinul n al variabilei x:

$$M_n[|x|]=\sum_{h=1,2,\dots,l}P_h|x_h|^n. \tag{4}$$

In afară de momentul de ordinul întîi $M_1[x]=M[x]$, care este identic cu valoarea medie a aceleiași variabile aleatorii, deosebit de semnificativ este momentul de ordinul al doilea:

$$M_2[x]=\sum_{h=1,2,\dots,l}P_hx_h^2. \tag{5}$$

In general, dacă $L=\sup_{h=1,2,\dots,l}|x_h|$, vom avea

$$|M_n[x]|\leq L^n. \tag{6}$$

Funcția caracteristică a variabilei $x=f(\xi)$ *este* $\varphi(\tau)=M[e^{i\tau f(\xi)}]$. *Avem, prin urmare,*

$$\varphi(\tau)=\sum_j P_j e^{ix_j\tau} \tag{7}$$

Proprietățile funcției caracteristice:

1°. $\varphi(0)=1$.

2°. $|\varphi(\tau)|\leq 1$.

3°. $\varphi(\tau)$ este o funcție analitică de τ ale cărei derivate, pentru $\tau=0$, sînt legate de momentele de ordinul respectiv prin egalitățile:

$$\left|\frac{d^n\varphi(\tau)}{d\tau^n}\right|_{\tau=0}=i^nM_n, \tag{8}$$

$$\varphi(\tau)=\sum_{n=0,1,\ldots,\infty}\frac{i^nM_n}{n!}\tau^n. \tag{9}$$

Ținînd seama de (6), seria din membrul al doilea este absolut convergentă pentru orice τ.

4°. $\varphi(\tau)$ *este o funcție de tip pozitiv.* In adevăr, din (7) rezultă că $a_1, a_2, \ldots, a_N$ fiind N valori complexe oarecare și $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ fiind N valori reale, este realizată următoarea inegalitate caracteristică a funcțiilor de tip pozitiv:

$$\sum_{h,k=1,2,\ldots,N} a_h\bar{a}_k\varphi(\tau_h-\tau_k)=\sum_{h,k,j}a_h\bar{a}_kP_je^{ix_j\tau_h}e^{-ix_j\tau_k}=$$

$$=\sum_j P_j\left|\sum a_he^{ix_j\tau_h}\right|^2\geq 0. \tag{10}$$

Exemplu. Cîmpul de probabilități este o urnă cu a bile albe și b negre. Evenimentele elementare au, toate, probabilitatea $\frac{1}{a+b}$. Evenimentul bilă albă are probabilitatea $p=\frac{a}{a+b}$; evenimentul bilă neagră are probabilitatea $q=\frac{b}{a+b}$.

O variabilă aleatorie asociată acestui cîmp și desfacerii în bile albe și negre este următoarea:

$$f(\xi)=\begin{cases}1 \text{ dacă } \xi \text{ este bilă albă,}\\ 0 \text{ dacă } \xi \text{ este bilă neagră.}\end{cases}$$

Avem imediat

$$M[f(\xi)]=p,\quad M_2[f(\xi)]=p;$$

$$M_2[f]-(M[f])^2=p-p^2=pq.$$

4. Cunoaşterea momentelor de diferite ordine serveşte la evaluarea repartiţiei valorilor variabilei $x=f(\xi)$ în cîmpul dat. Aceasta se pune în evidenţă cu ajutorul următoarei importante inegalităţi:

Inegalitatea generalizată a lui Cebîşev. Fie $x=f(\xi)$ o variabilă aleatorie; pentru orice număr real pozitiv şi orice $\varepsilon>0$, avem:

$$P(|x|\geq\varepsilon)\leq\frac{M_n[|x|]}{\varepsilon^n}. \tag{11}$$

Prin definiţie,

$$M_n[|x|]=\sum_{h=1,2,\ldots,l}|x_h|^nP(E_h)\geq\sum_{|x_h|\geq\varepsilon}|x_h|^nP(E_h)\geq$$
$$\geq\varepsilon^n\sum_{|x_h|\geq\varepsilon}P(E_h)=\varepsilon^nP(\bigcup_{|x_h|\geq\varepsilon}E_h)=\varepsilon^nP(|x|\geq\varepsilon),$$

de unde rezultă imediat inegalitatea generalizată a lui Cebîşev. Din (11) se obţine

$$P(|x|<\varepsilon)\geq1-\frac{M_n(|x|)}{\varepsilon^n}, \tag{12}$$

ţinînd seama că

$$P(|x|<\varepsilon)+P(|x|\geq\varepsilon)=1.$$

5. *Variabila abatere.* Variabila aleatorie $y=f(\xi)-M[f(\xi)]$ se numeşte *abatere.* Este evident că $M[y]=0$.

Abaterea medie pătratică μ este definită de egalitatea

$$\mu^2=M[y^2]. \tag{13}$$

Din această definiţie rezultă

$$\mu^2=M_2[f(\xi)]-(M[f(\xi)])^2.$$

In adevăr,

$$\mu^2=M_2(f-M_1[f])=M[(f-M_1[f])^2]=$$
$$=M[f^2-2fM_1[f]]+[M_2[f]^2]=M_2[f]-(M[f])^2.$$

Dispersia variabilei $x=f(\xi)$ este, prin definiţie, μ^2. Justificarea acestei denumiri se obţine folosind inegalitatea lui Cebîşev aplicată variabilei abatere pentru $n=2$. Relaţia (12) devine în acest caz

$$P(|x-M[x]|<\varepsilon)\geq1-\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}. \tag{14}$$

Dacă luăm pe μ ca abatere tip şi punem $\varepsilon=k\mu$, relaţia (14) capătă forma

$$P(|x-M[x]|<k\mu)\geq1-\frac{1}{k^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k=3$, probabilitatea ca

$$-3\mu<x-M[x]<+3\mu$$

este mai mare decît $\frac{8}{9}$; pentru $k=5$,

$$P(|x-M(x)|<5\mu)\geq 1-\frac{1}{25}\cdot$$

Marginea de siguranţă este deci 0,04, mai mică decît 0,05, care constituie o margine de siguranţă practică satisfăcătoare.

Valoarea lui μ^2 ne dă deci măsura dispersiei valorilor variabilei $x=f(\xi)$ în jurul valorii medii. Cînd μ este mic, valorile lui sînt strînse în jurul valorii medii. Cînd este mare, valorile sînt împrăştiate.

6. *Relaţii între momentele de diferite ordine.* Observăm mai întîi că momentul absolut de ordinul k este valoarea medie a funcţiei convexe $y=|x|^k$ $(k\geq 1)$.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_l$ cele l valori ale variabilei aleatorii cu probabilităţile respective $p_1, p_2, \ldots, p_l$ şi $y_h=|x_h|^k$ cele l valori corespunzătoare ale funcţiei $y=|x|^k$. Punctele de coordonate (x_h, y_h) $(h=1, 2, \ldots, l)$ sînt situate pe curba convexă $y=|x|^k$. Dacă le atribuim mase egale cu probabilităţile respective, centrul de greutate, de coordonate

$$\xi=\sum_h p_h x_h, \quad \eta=\sum_h p_h |x_n|^k,$$

este situat în interiorul oricărui contur convex care înconjură punctele M_h, prin urmare deasupra curbei $y=|x|^k$. De unde *inegalitatea Hölder-Jensen*

$$f(\xi)\leq\eta \qquad (15)$$

sau, explicit, pentru $k\geq 1$

$$\left(\sum_h p_h x_h\right)^k\leq\sum p_h |x_h|^k. \qquad (16)$$

Fie acum $x_h=|a_h|^m$, $m\geq 1$. Inegalitatea precedentă, adevărată pentru orice sistem de valori x_h, devine

$$\left(\sum_h p_h |a_h|^m\right)^k\leq\sum_h p_h |a_h|^{km} \qquad (17)$$

pentru orice sistem de valori a_h şi orice numere pozitive m şi k mai mari decît unu.

Notînd cu

$$E_m=\left[\sum_h p_h\,|\,a_h\,|^m\right]^{\frac{1}{m}}$$

valoarea medie absolută de ordinul m, inegalitatea (17) se va scrie

$$E_m\leq E_{km} \qquad (k>1). \tag{18}$$

De unde, o primă teoremă:

Valoarea medie de ordinul m, E_m, ca funcţie de m, este monoton crescătoare pentru $m>1$.

Dacă punem

$$u_j=m_j^{\frac{1}{m}}\,|\,x_j\,|, \quad v_j=m_j^{\frac{m-1}{m}},$$

inegalitatea (16) devine

$$\left(\sum_j u_j v_j\right)\leq\left(\sum_j u_j^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\sum_j v_j^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Luînd

$$u_j=w_j^{\alpha}; \quad v_j=t_j^{\beta}, \quad \alpha\geq 1, \quad \beta\geq 1,$$

obţinem

$$\sum_j w_j^{\alpha}t_j^{\beta}\leq\left(\sum_j w_j^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left(\sum_j t_j^q\right)^{\frac{\beta}{q}}, \tag{19}$$

unde

$$p=\alpha m, \quad q=\beta\frac{m}{m-1},$$

deci

$$p>\alpha, \quad q>\beta.$$

Vom presupune

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}=1. \tag{20}$$

In acest caz, vom pune:

$$w_j^p=m_j x_j^p; \quad t_j^q=m_j y_j^q; \quad m_j\geq 0, \quad x_j\geq 0, \quad y_j\geq 0.$$

Relaţiile (19) şi (20) ne dau

$$\sum_j m_j x_j^{\alpha}y_j^{\beta}\leq\left(\sum_j m_j x_j^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}\left(\sum m_j y_j^q\right)^{\frac{\beta}{q}}. \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această inegalitate generalizează *inegalitatea lui Schwartz*, care se obține luînd $\alpha=1$, $\beta=1$, $p=2$, $q=2$:

$$\sum_j m_j x_j y_j \leq \left(\sum m_j x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum m_j y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Trecerea de la (21) sau (22) la inegalitățile care se obțin înlocuind sumele prin integrale nu prezintă nici o greutate și nu vom reveni asupra demonstrațiilor.

§ 4. Desfaceri și variabile aleatorii independente

1. *Generalități.* Dependența și independența între variabilele aleatorii sînt noțiuni tipic probabiliste. Ele nu privesc însești valorile acestor variabile, ci probabilitatea evenimentelor cărora le corespund aceste valori. Acest fapt conduce la corespondența dintre independența a două variabile aleatorii și ndep endența desfacerilor pe care ele le determină.

2. *Independența a două sau mai multe desfaceri.* Două evenimente A și B sînt independente, dacă [v. § 2, formula (7)]

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B). \qquad (1)$$

Fiecare dintre aceste evenimente determină o desfacere a lui E. Avem astfel cele două desfaceri

$$A,\ A';$$
$$B,\ B'.$$

Așa cum am arătat în § 2, vom avea pe lîngă (1) și egalitățile

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B=')P(A)\,P(B'),\\ P(A' \cap B) = P(A')\,P(B),\\ P(A' \cap B') = P(A')\,P(B'). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

care sînt o consecință a relației (1).

Să considerăm în același timp cîte o variabilă $x=f(\xi)$ și $y=g(\xi)$, corespunzătoare fiecăreia dintre cele două desfaceri și definite astfel:

$$x=x_1 \text{ dacă } \xi \in A;\quad x=x_2 \text{ dacă } \xi \in A',$$
$$y=y_1 \text{ dacă } \xi \in B;\quad y=y_2 \text{ dacă } \xi \in B'.$$

Probabilitatea ca $y=y_1$ dacă $x=x_1$ este, pe baza egalității (1), identică cu $P_A(B)=P(B)$. In același mod găsim că

probabilitatea ca $y=y_1$, dacă $x=x_2$, este $P_{A'}(B)=P(B')$, pe baza celei de a doua dintre egalităţile (2).

Prin urmare, valorile lui y sînt independente de valorile lui x. Cu ajutorul primei şi ultimei dintre egalităţile (2) se vede că şi valorile variabilei x sînt independente de valorile variabilei y. Prin urmare, în aceste condiţii cele două variabile sînt independente. Vom spune, în acelaşi timp, că cele două desfaceri sînt independente.

Luînd acest caz particular ca model, vom putea defini independenţa a două variabile aleatorii oarecare, definite pe acelaşi *cîmp finit de probabilitate* $\{E, \mathcal{K}, P\}$.

Definiţie. Două variabile aleatorii $x=f(\xi)$, $y=g(\xi)$ *care determină desfacerile*

$$F_1, F_2, \ldots, F_l; \quad G_1, G_2, \ldots, G_m,$$

sînt independente dacă

$$P(F_j \cap G_h)=P(F_j)\,P(G_h). \quad j=1, 2, \ldots, l; \quad h=1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Ca o lămurire a acestei definiţii vom observa că din egalităţile (3) rezultă

$$P_{x=x_j}(y=y_h)=P(y=y_h)=P(G_h).$$

De asemenea,

$$P_{y=y_h}(x=x_j)=P(x=x_j)=P(F_j),$$

pentru orice $j=1, 2, \ldots, l$ şi orice $h=1, 2, \ldots, m$.

Egalităţile (3) *caracterizează, o dată cu independenţa variabilelor f şi g, independenţa celor două desfaceri.*

Vom introduce acum o definiţie a independenţei totale a n desfaceri şi implicit a oricărui sistem de variabile care le corespund.

Definiţie. Desfacerile $D^1, D^2, \ldots, D^n$ *ale evenimentului E, unde* D^j este desfacerea

$$E_1^j, E_2^j, \ldots, E_{l_j}^j \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

sînt total independente între ele dacă

$$P(E_{k_1}^1 \cap E_{k_2}^2 \cap \ldots \cap E_{k_n}^n)=P(E_{k_1}^1)\,P(E_{k_2}^2)\ldots P(E_{k_n}^j), \tag{4}$$

pentru

$$k_j=1, 2, \ldots, l_j; \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sisteme de n variabile aleatorii independente în totalitatea lor.

Definiție. Un sistem de n variabile aleatorii $x_j = f_j(\xi)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, *definite pe același cîmp finit de probabilitate, este independent în totalitatea sa dacă cele n desfaceri corespunzătoare sînt independente.*

Această condiție se mai poate scrie, dacă notăm cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{il_j}$ cele l_j valori pe care le ia x_j:

$$P(x_1=x_{1k_1},\ x_2=x_{2k_2},\ldots,x_n=x_{nk_n})=P(x_1=x_{1k_1})\,P(x_2=x_{2k_2})\ldots$$

$$\ldots P(x_n=x_{nk_n}) \qquad k_j=1,\ 2,\ldots l_j;\quad j=1,\ 2,\ldots,n. \tag{5}$$

Din sistemul (4) se poate trage o consecință care este echivalentă cu (4) și are un aspect mai general decît el.

Fie A^j reuniunea unui număr oarecare de elemente ale desfacerii D^j:

$$A^j=E^j_{r_1}\cup E^j_{r_2}\cup\ldots\cup E^j_{r_j},$$

pentru orice j.

Sistemul (4) ne dă atunci prin sumare

$$\sum_{\substack{k_j=l_1,l_2,\ldots,l_j\\ j=1,2,\ldots,n}} P(E^1_{k_1}\cap\ldots\cap E^n_{k_n})=$$

$$=\sum_{k_1=1,2,\ldots,l_1} P(E^1_{k_1})\sum_{k_2=1,2,\ldots,l_2} P(E^2_{k_2})\ldots\sum_{k_n=1,2,\ldots,l_n} P(E^n_{k_n}),$$

de unde

$$P(A^1\cap A^2\cap\ldots\cap A^n)=P(A^1)\,P(A^2)\ldots P(A^n), \tag{6}$$

oricare ar fi reuniunile $A^1, A^2, \ldots, A^n$, egalitate care cuprinde la rîndul ei pe (4) și poate fi luată ca definiție pentru independența desfacerilor $D^1, D^2, \ldots, D^n$ sau pentru independența variabilelor respective.

Ca exemplu, vom considera *un sistem de n urne* $U^1, U^2, \ldots, U^n$, avînd fiecare aceeași compoziție: a_1 bile de culoarea 1, a_2 bile de culoarea 2, ..., a_m bile de culoarea m, în total $N=a_1+a_2+\ldots+a_m$ bile. Evenimentele elementare ale cîmpului $\{E, K, P\}$ format cu acest sistem de urne sînt de forma $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, unde α^1 este o bilă oarecare din prima urnă etc. Dacă notăm cu E^l_j evenimentul: bila de culoarea j din urna U^l, evenimentele importante ale cîmpului format de cele n urne sînt:

$$E^1_{j_1},\ E^2_{j_2},\ldots,\ E^n_{j_n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea $P(E^1_{j_1} E^2_{j_2} \dots E^n_{j_n}) = P(E^1_j) \dots P(E^n_j)$. Succesiunea $E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, \dots, E^n_{j_n}$ nu trebuie considerată ca intersecție, ci ca o alăturare. Evenimentele $E^1_{j_1}, \dots, E^n_{j_n}$ sînt numai componente ale evenimentului $E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, \dots, E^n_{j_n}$. Pentru a face, de exemplu, ca $E^1_{j_1}$, care este un eveniment al urnei U^1, să figureze și ca eveniment al cîmpului $\{E, K, P\}$ îl vom completa după cum urmează și vom nota

$$E^1_{j_1} = E^1_{j_1} E^2 E^3 \dots E^n,$$

unde E^j este evenimentul total al urnei U^j.

In general, construim după același procedeu evenimentele $E^l_{j_l}$, corespunzînd urnei U^l ca evenimente ale cîmpului $\{E, K, P\}$ al celor n urne. Este evident că

$$\overline{E}^1_{j_1} \cap E^2_{j_2} \cap \dots \cap \overline{E}^n_{j_n} = E^1_{j_1} E^2_{j_2} \dots E^n_{j_n},$$

prin urmare

$$P(\overline{E}^1_{j_1} \cap \overline{E}^2_{j_2} \cap \dots \cap \overline{E}^n_{j_n}) = P(E^1_{j_1}) P(E^2_{j_2}) \dots P(E^n_{j_n})$$

pentru orice

$$j_1, j_2, \dots, j_n = 1, 2, \dots, m.$$

La această egalitate corespunde afirmația că urnele sînt independente.

Cu ajutorul egalităților (6) se verifică imediat următoarea

Propoziție. Dacă cele n variabile x_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ sînt independente în totalitatea lor, variabilele oricărui sistem de l $(l < n)$ dintre aceste variabile sînt independente în totalitatea lor.

Pentru demonstrație, lăsăm arbitrare mulțimile A^j, corespunzătoare grupului de l variabile care ne interesează, iar pentru celelalte facem $A^j = E$.

In particular, *n variabile independente în totalitatea lor sînt independente două cîte două.*

Reciproca acestei propoziții nu este valabilă: n variabile independente două cîte două nu sînt necesar independente în totalitatea lor.

Iată un exemplu care confirmă această afirmație. Fie

$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \text{ cu } P(e_j) = \frac{1}{9}$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 8).$$

Fie acum

$$A_1=\{e_0, e_1, e_2\};\quad A_2=\{e_0, e_3, e_4\};\quad A_3=\{e_0, e_5, e_6\};$$
$$A_4=\{e_0, e_7, e_8\}.$$

Avem evident

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{3}\cdot$$

Evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 sînt independente două cîte două, deoarece

$$P(A_j\cap A_h)=P(A_j)\,P(A_h)=\frac{1}{9}\cdot$$
$$j=1,2,3,4,\ j\neq h.$$

In acelaşi timp, însă,

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(e_0)=\frac{1}{9}\neq P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)=\frac{1}{27}\cdot$$

Prin urmare, nu sînt independente cîte trei, oricum le-am lua. Luîndu-le toate patru, obţinem:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=P(e_0)=\frac{1}{9},$$

în vreme ce

$$P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4)=\frac{1}{3^4}\cdot$$

Sînt împrejurări în care nu interesează decît independenţa două cîte două pentru variabilele unui sistem. Ca un exemplu avem propoziţia care urmează.

Propoziţie. Dacă variabilele $x_1=f_1(\xi)$, $x_2=f_2(\xi),\ldots,x_n=f_n(\xi)$ *sînt independente două cîte două, avem egalitatea*

$$M_2[x_1+x_2+\ldots+x_n]=\sum_j M_2[x_j]+2\sum_{j<i} M[x_i]\,M[x_j].$$

In adevăr,

$$M_2[x_1+x_2+\ldots+x_n]=M[(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2]=$$
$$=\sum_j M[x_j^2]+2\sum_{j<i} M[x_ix_j],$$

de unde, folosind independenţa două cîte două, care dă $M[x_ix_j]=M[x_i]\,M[x_j]$, obţinem egalitatea enunţată.

3. *Proprietăţi ale sistemelor de variabile independente ale unui cîmp.*

I. Fie $x_j = f_j(\xi)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ un sistem de n variabile independente în totalitatea lor și $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ n funcții reale oarecare; variabilele aleatorii $\varphi_j(f_j(\xi))$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ sînt de asemenea independente.

Demonstrația este imediată, ținînd seama de relația (6), deoarece componentele desfacerilor care corespund variabilelor $\varphi_j(f_j(\xi)) = \varphi_j \cdot f_j$ sînt de forma A^j, folosită în (6).

II. Fie $[I_\alpha]_{\alpha \in J}$ o partiție a mulțimii de indici $1, 2, \ldots, n$ și $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o funcție reală de $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Variabilele

$$g_\alpha(\xi) = [F(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \qquad \alpha \in J$$

$$y_j = \begin{cases} f_j(\xi) & j \in I_\alpha, \\ k & j \notin I_\alpha, \end{cases}$$

k fiind o constantă oarecare, convenabil aleasă, sînt independente în totalitatea lor.

Demonstrația este imediată scriind mulțimile pe care $g_\alpha(\xi)$ își iau diferitele lor valori și folosind relația (6).

In particular, sînt independente funcțiile $g_\alpha = \prod_{j \in I_\alpha} f_\alpha$ $(\alpha \in J)$.

Pentru cazul acesta am avut

$$F = y_1 y_2 \ldots y_n; \quad k = 1.$$

Sînt de asemenea independente funcțiile $h_\alpha = \sum_{j \in I_\alpha} f_j$ $(\alpha \in J)$. In acest caz am luat

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_n; \quad k = 0.$$

Teoremă. Valoarea medie a produsului a două variabile independente ale unui cîmp este egală cu produsul valorilor lor medii.

Fie, pentru demonstrație, $x = f(\xi)$, $y = g(\xi)$ cele două variabile și valorile respective $x_1, x_2, \ldots, x_l$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$, luate pe mulțimile corespunzătoare $F_1, F_2, \ldots, F_l$; $G_1, G_2, \ldots, G_m$.

Avem

$$M[xy] = \sum_{j,k} x_l y_k P(F_j \cap G_k).$$

Dacă ţinem seama de independenţă, $P(E_j \cap G_k) = P(E_j)\,P(G_k)$, deci

$$M[xy] = \sum_{j,k} x_j y_k P(E_j)\,P(G_k) = \left(\sum_j x_j P(E_j)\right)\left(\sum_k y_k P(G_k)\right) = M[x]\,M[y].$$

Prin urmare, teorema este demonstrată.

Folosind această teoremă, propoziţia anterioară şi proprietatea II se demonstrează imediat prin recurenţă.

Teoremă. Valoarea medie a unui produs de variabile aleatorii independente în totalitatea lor, ale unui cîmp, este produsul valorilor medii.

Să presupunem, pentru aceasta, că teorema este adevărată pentru n variabile independente şi să arătăm că este valabilă pentru $n+1$ variabile independente.

In adevăr, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ sînt $n+1$ variabile independente în totalitatea lor, variabilele $f_0 = f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$ sînt independente între ele, deci

$$M[f_1 f_2 \ldots f_{n+1}] = M[f_1 f_2 \ldots f_n]\,M[f_{n+1}].$$

Cum însă, prin ipoteză, teorema este adevărată pentru n variabile independente, avem:

$$M[f_1 f_2 \ldots f_n] = M[f_1]\,M[f_2] \ldots M[f_n],$$

deci

$$M[f_1 f_2 \ldots f_{n+1}] = M[f_1]\,M[f_2] \ldots M[f_{n+1}].$$

Teorema fiind valabilă pentru $n=2$, va fi valabilă pentru orice n.

§ 5. Variabile aleatorii dependente. Corelaţie

Corelaţia a două variabile. Definiţie. Se numeşte *corelaţie a două variabile f, g definite pe cîmpul de probabilitate* $\{E, \mathcal{K}, P\}$ *valoarea medie*

$$\gamma = M[(f - M[f])\,(g - M[g])]. \qquad (1)$$

Vom avea atunci

$$\gamma = M[fg] - M[f]\,M[g]. \qquad (2)$$

Expresia (2) prezintă corelaţia ca diferenţa între valoarea medie a produsului şi produsul valorilor medii ale celor două variabile.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă imediat următoarele două propoziții:

Propoziția 1. *Corelația a două variabile independente este nulă.*

Propoziția 2. Condiția necesară și suficientă ca două variabile să fie necorelate ($\gamma=0$) este ca

$$M[fg]=M[f]\,M[g].$$

Următorul exemplu ne va arăta că există *variabile necorelate care nu sînt independente.*

Exemplu. Sistemul de evenimente E este format din patru puncte ale unui plan, reprezentate prin coordonatele lor carteziene, cu probabilitățile respective p_1, p_2, p_3, p_4, legate prin relațiile

$$p_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4; \quad p_1+p_2+p_3+p_4=1.$$

Variabilele aleatorii sînt coordonatele x și y; x are valorile 0, 4 cu probabilitățile respective $p_1+p_2+p_3$, p_4, iar y are valorile 1, 2, k cu probabilitățile respective p_1+p_4, p_2, p_3:

$$M[x]=4p_4, \quad M[y]=p_1+p_4+2p_2+kp_3.$$

In același timp,

$$P(x=4,\ y=1)=p_4; \quad P(x=4,\ y=2)=0;$$

$$P(x=4,\ y=4)=0.$$

Prin urmare, $M[xy]=4p_4$. Urmează

$$\gamma=4p_4-4p_4\,[p_1+p_4+2p_2+kp_3].$$

Este suficient ca $p_2+(k-1)\,p_3=0$, deci $k=1-\dfrac{p_2}{p_3}$, pentru a avea $\gamma=0$, adică variabilele să fie *necorelate.*

In același timp, variabilele x și y nu sînt independente. In adevăr,

$$P(x=0,\ y=1)=p_1,$$

$$P(x=0)=p_1+p_2+p_3; \quad P(y=1)=p_1+p_4$$

și, în general,

$$p_1 \neq (p_1+p_2+p_3)\,(p_1+p_4).$$

Definiție. Coeficientul de corelație a variabilelor f, g este raportul

$$r=\frac{M[(f-M[f])\,(g-M[g])]}{\sqrt{M_2[f-M[f]]}\,\sqrt{M_2[g-M[g]]}}=\frac{\gamma}{\mu_f\mu_g}. \tag{3}$$

Teoremă. Pentru orice sistem de două variabile avem $r^2 \leq 1$.

Observăm că forma

$$M[\alpha(f-M[f])+\beta(g-M[g])]^2=\mu_f^2\alpha^2+2\gamma\alpha\beta+\mu_g^2\beta^2$$

Scanned with OKEN Scanner

este pozitivă; prin urmare,

$$\gamma^2 < \mu_f^2 \mu_g^2,$$

deci

$$r^2 \leq 1.$$

Cînd $r=0$, corelaţia este nulă.

Dacă $r^2=1$, luînd $\alpha=-r\mu_g$, $\beta=\mu_f$, rezultă

$$M[-r\mu_g(f-M[f])+\mu_f(g-M[g])]^2=0,$$

de unde

$$-r\mu_g([f-M[f])+\mu_f(g-M[g])=0.$$

Deci, cele două variabile sînt legate între ele printr-o relaţie liniară.

§ 6. Variabile aleatorii vectoriale pe un cîmp finit

1. Variabilele aleatorii care corespund mărimilor fizice sînt nu numai scalare, ci şi vectoriale.

Este deci necesar să definim şi să studiem împreună cu variabilele scalare şi pe cele vectoriale.

Fie S un spaţiu vectorial şi $\{E, \mathcal{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate finit, pe care $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sînt evenimentele elementare, cu probabilităţile respective $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Fie $V(\xi)$ o funcţie cu valori în S, determinată pentru fiecare eveniment elementar $\xi = e_j (j=1, 2, \ldots, m)$. Presupunem că $V_1, V_2, \ldots, V_r$ sînt cele $r (r \leq m)$ valori distincte ale vectorului V; $E_1, E_2, \ldots, E_r$ mulţimile pe care V ia valorile respective şi $P_j = P(E_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ probabilităţile acestor evenimente. $E_1, E_2, \ldots, E_r$ este desfacerea corespunzătoare vectorului $V(\xi)$. Este evident că oricare ar fi numărul real sau complex a, vectorul aleator $aV(\xi)$ determină aceeaşi desfacere a lui E ca şi $V(\xi)$.

Valoarea medie a vectorului aleator $V(\xi)$ este un vector:

$$V=M[V]=\sum_{h=1, 2, \ldots, r} P_h V_h. \qquad (1)$$

2. *Sume de vectori aleatori ai unui cîmp.* Fie $U(\xi)$ şi $V(\xi)$ doi vectori aleatori, $U_1, U_2, \ldots, U_{r_1}$; $V_1, V_2, \ldots, V_{r_2}$ valorile pe care le iau în cîmp şi $F_1, F_2, \ldots, F_{r_1}$; $E_1, E_2, \ldots, E_{r_2}$ desfacerile respective.

Prin definiție, vectorul sumă

$$W(\xi)=U(\xi)+V(\xi)$$

este vectorul aleator care ia valoarea U_j+V_k pentru evenimentul $F_j^1 \cap E_k^2$. Rezultă imediat că

$$W=U+V.$$

Este evident că putem defini în același mod suma unui număr oarecare de vectori aleatori.

3. *Sume de vectori aleatori definiți pe cîmpuri independente.* Fie V^1 un vector aleator al cîmpului $\{E^1, \mathcal{K}^1, P^1\}$ și V^2 un vector aleator al cîmpului $\{E^2, \mathcal{K}^2, P^2\}$, $E_1^1, E_2^1, \ldots, E_{r_1}^1$; $E_1^2, E_2^2, \ldots E_{r_1}^2$ respectivele desfaceri.

Construim cîmpul unic pe care sînt definiți cei doi vectori și anume $\{E, \mathcal{K}, P\}$, unde E este mulțimea evenimentelor elementare $e_j^1 e_k^2$ $(j=1, 2, \ldots, r_1;\ k=1, 2, \ldots, r_2)$; $\mathcal{K}=\mathcal{K}(E)$ mulțimea părților mulțimii E, iar $P(e_j^1 e_k^2)=P^1(e_j^1)P^2(e_k^2)=P_j^1 P_k^2$. Pe acest cîmp vectorul V^1, ale cărui valori sînt $V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{r_1}^1$, determină desfacerea $E_1^1 E^2, E_2^1 E^2, \ldots, E_{r_1}^1 E^2$ cu probabilitățile respective $P(E_j^1 E^2)=P^1(E_j^1)P^2(E^2)=P_j^1 (j=1, 2, \ldots, r_1)$, iar vectorul V^2, ale cărui valori sînt $V_1^2, V_2^2, \ldots, V_{r_2}^2$, determină desfacerea $E^1 E_k^2 (k=1, 2, \ldots, r_2)$, cu probabilitățile respective $P(E^1 E_k^2)=P^1(E^1)P^2(E_k^2)=P_k^2$.

Am redus problema dată la aceea tratată mai sus, a sumei a doi vectori definiți pe același cîmp.

4. *Vectori aleatori independenți. Definiție. Vectorii aleatori $V^j(\xi)$ sînt independenți în totalitatea lor dacă desfacerile corespunzătoare sînt independente $E_1^j, E_2^j, \ldots, E_{r_j}^j$.*

5. *Momente.* Noțiunea de moment, începînd de la momentul de ordinul al doilea, al unui vector are un sens restrîns.

Definiție. Momentul de ordinul k al vectorului V al cîmpului $\{E, \mathcal{K}, P\}$ este egal cu momentul de ordinul k al variabilei aleatorii $\| V \|$.

6. *Corelația între doi vectori* nu are sens pentru vectorii unui spațiu vectorial oarecare. Ea are sens numai dacă pe acest spațiu este definit un produs scalar al celor doi vectori. Un spațiu vectorial pe care este definit un atare produs este *spațiul Hilbert* real, pentru care produsul scalar UV este un

număr real, funcție liniară de U și de V și este simetric în raport cu U și V, iar

$$UU = <U, \quad U> = \| U \|^2.$$

Produsul scalar UV este o variabilă aleatorie, ale cărei valori sînt $U_j V_k$, $(j=1, 2, \ldots, s;\ k=1, 2, \ldots, s)$.

Momentul mixt al celor doi vectori este

$$M[UV] = \sum_{j,k} P(F_j \cap E_k)\, U_j\, V_k. \tag{1}$$

Corelația între cei doi vectori este

$$r_{U,V} = M[(U - M[U])(V - M[V])]. \tag{2}$$

7. *Funcția caracteristică a unui vector aleator* V aparținînd unui spațiu Hilbert este definită ca media funcției $e^{i\theta V}$, unde θ este un vector generic al spațiului:

$$\varphi(\theta) = M(e^{i\theta V}) = \sum_{h=1, 2, \ldots, r} p_h\, e^{i\theta V_h}. \tag{3}$$

Prin definiție chiar

$$\varphi(\theta) = \sum_n \frac{i^n}{n!} \sum p_h (\theta\, V_h)^n. \tag{4}$$

8. *Poziția și viteza unei particule în mișcare browniană* sînt vectori aleatori în spațiul euclidian cu trei dimensiuni. Un spațiu euclidian, considerat ca spațiu vectorial, este un spațiu Hilbert. Norma unui vector V al acestui spațiu este lungimea lui, iar produsul scalar între doi vectori UV este produsul scalar obișnuit.

In spațiul euclidian cu trei dimensiuni, un vector aleator $V(\xi)$ este un sistem de trei variabile aleatorii $x(\xi)$, $y(\xi)$, $z(\xi)$, determinat pe cîmpul de probabilitate finit $\{E, \mathcal{K}, P\}$.

Funcția caracteristică a vectorului $V(\xi)$ este

$$\varphi(\theta) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_h P_h\, e^{i(\alpha x_h + \beta y_h + \gamma z_h)},$$

cînd α, β, γ sînt componentele vectorului θ. Dezvoltînd în serie, avem:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n \in N} \frac{i^n}{n!} \sum_h P_h (\alpha x_h + \beta y_h + \gamma z_h)^n.$$

Se pun deci în evidenţă trei momente de ordinul întîi

$$M[x],\ M[y],\ M[z]$$

şi şase momente de ordinul al doilea

$$M[x^2],\ M[y^2],\ M[z^2]$$

şi

$$M[xy],\ M[yz],\ M[zx],$$

ultimele trei fiind momente mixte. Momentele de ordinul al doilea sînt deci coeficienţii formei pătratice $\sum_h P_h(\alpha x_h+\beta y_h+\gamma z_h)^2$ definită pozitiv, al cărei determinant

$$\begin{vmatrix} M[x^2] & M[xy] & M[xz] \\ M[yx] & M[y^2] & M[yz] \\ M[zx] & M[zy] & M[z^2] \end{vmatrix}$$

este pozitiv — cu excepţia unei împrejurări, pe care o lăsăm în atenţia cititorului, în care determinantul poate fi nul.

Dacă presupunem $M[V]=0$, momentele $M[xy]$, $M[yz]$, $M[zx]$ sînt corelaţii între componentele lui V. Ele se mai numesc *corelaţii interne*.

§ 7. Mişcări browniene şi lanţuri de evenimente de tip Markov

1. *Exemplul lui Rayleigh.* Se consideră n poziţii echidistante pe un cerc: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ în ordinea naturală; după M_n urmează M_1.

Notăm cu p_j probabilitatea de a trece din M_j în M_{j+1} şi cu q_j probabilitatea de a trece din M_j în M_{j-1} şi presupunem că

$$p_j+q_j=1.$$

Evenimentele cîmpului sînt trecerile unei particule mobile prin diferitele poziţii $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Presupunînd că avem un mare număr de particule a căror deplasare se face după regulile precedente, semnificaţia celor două probabilităţi p_j şi q_j este următoarea:

Din cele $N_{j,n}$ particule care la momentul n se găsesc în poziţia M_j, un număr de $p_j N_{j,n}$ trec în momentul următor în M_{j+1}, iar $q_j N_{j,n}$ trec în M_{j-1}.

Problema cea mai importantă care se pune imediat este aceea a *existenței unei distribuții limită staționară.*

Acest tip de mișcare, numit în genere *mișcare browniană* după modelul fizic clasic al acestei mișcări, poate fi indefinit variat. El își găsește o realizare probabilistă, în cazul unui sistem finit de evenimente, în *lanțul de evenimente de tip Markov*, pe care-l studiem sub cîteva aspecte în acest paragraf.

2. Fie $\{E, \mathcal{K}, P\}$ un cîmp finit de evenimente și x^n un șir de variabile aleatorii numerice sau vectoriale, definite pe acest cîmp pentru fiece n, cînd $n=1, 2, 3, \ldots$ Notăm cu $E_1^n, E_2^n, \ldots, E_{r_n}^n$ desfacerea corespunzătoare variabilei x^n, cu $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{r_n}^n$ valorile distincte pe care le ia x^n pentru evenimentele respective.

Să notăm pentru scurtarea scrisului

$$E_{j_1 j_2 \ldots j_n} = E_{j_1}^1 \cap E_{j_2}^2 \cap \ldots \cap E_{j_n}^n.$$

Definiții. Probabilitatea condiționată $P_{E_{j_1}, \ldots, j_{n-1}}(E_{j_n})$ depinde de succesiunea de evenimente $E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, \ldots, E_{j_n}^n$. Celei mai generale dependențe astfel definită îi corespunde un *lanț de evenimente sau de variabile aleatorii* $x^1, x^2, \ldots x^n, \ldots$ *în toată generalitatea sa.*

Dacă $P_{E_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}}}(E_{j_n}^n) = P(E_{j_n}^n)$ pentru orice n și orice șir $E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, \ldots, E_{j_n}^n$, atunci șirul este o *simplă succesiune de variabile independente. Șirul constituie un lanț Markov simplu dacă*

$$P_{E_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}}}(E_{j_n}^n) = P_{E_{j_{n-1}}^{n-1}}(E_{j_n}^n), \tag{1}$$

pentru orice n și orice succesiune $E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, \ldots, E_{j_n}^n$. *Șirul constituie un lanț Markov multiplu de ordinul al doilea dacă*

$$P_{E_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}}(E_{j_n}^n) = P_{E_{j_{n-2}}^{n-2} \cap E_{j_{n-1}}^{n-1}}(E_{j_n}^n). \tag{2}$$

Lanțurile Markov multiple de ordinul p se definesc prin dependența probabilității unui eveniment la momentul n de cele p evenimente anterioare.

3. *Relația caracteristică a lanțului Markov simplu* este reprezentată de egalitățile

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_n}^n) = \sum_{j_m} P_{E_{j_l}^l}(E_{j_m}^m) P_{E_{j_m}^m}(E_{j_n}^n) \tag{3}$$

pentru orice $l < m < n$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom stabili această egalitate funcțională, demonstrînd mai întîi următoarea egalitate constructivă:

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} P_{E_{j_l}^l}(E_{i_1}^{l+1})\, P_{E_{i_1}^{l+1}}(E_{i_2}^{l+2}) \ldots P_{E_{i_{r-1}}^{l+r-1}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}). \tag{4}$$

In adevăr,

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \frac{P(E_{j_l}^l \cap E_{j_{l+r}}^{l+r})}{P(E_{j_l}^l)}. \tag{5}$$

Dar

$$P(E_{j_l}^l \cap E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} P(E_{j_l}^l \cap E_i^{l+1} \cap \ldots \cap E_i^{l+r-1} \cap E_{j_{l+r}}^{l+r}).$$

Aplicînd formula (4) § 2 și ținînd seama că lanțul este simplu rezultă

$$P(E_{j_l}^l \cap E_{j_{l+r}}^{l+r}) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}} P(E_{j_l}^l)\, P_{E_{j_l}^l}(E_{i_1}^{l+1})\, P_{E_{i_1}^{l+1}}(E_{i_2}^{l+2}) \ldots P_{E_{i_{r-1}}^{l+r-1}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}).$$

Inlocuind această expresie în (5), obținem egalitatea (4) căutată

Din (4), care se mai poate scrie

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}}^{1, 2, \ldots, m} P_{E_{j_l}^l}(E_{i_1}^{l+1})\, P_{E_{i_1}^{l+1}}(E_{i_2}^{l+2}) \ldots$$

$$\ldots P_{E_{i_{s-1}}^{l+s-1}}(E_{i_s}^{l+s}) \sum_{i_s, \ldots, i_{r-1}}^{1, 2, \ldots, m} P_{E_{i_s}^{l+s}}(E_{i_{s+1}}^{l+s+1}) \ldots P_{E_{i_{r-1}}^{l+r-1}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}),$$

găsim

$$P_{E_{j_l}^l}(E_{j_{l+r}}^{l+r}) = \sum_{i_s} P_{E_{j_l}^l}(E_{i_s}^{l+s})\, P_{E_{i_s}^{l+s}}(E_{j_{l+r}}^{l+r}),$$

oricare ar fi s cuprins între 0 și r. Aceasta este chiar relația (3).

Lanțul Markov este propriu-zis *dacă desfacerile sînt identice pentru fiecare* n: $E_j^n = E_j$.

In acest caz, vom putea simplifica notațiile, scriind

$$P_{E_j^l}(E_k^n) = P_j(l, n),$$

iar relaţiile fundamentale (3) iau forma *relaţiei lui Chapman*:

$$P_{jk}(l,\ n)=\sum_{h=1,\ 2,\ \ldots,\ r} P_{jh}(l,\ m)\,P_{hk}(m,\ n), \qquad (5')$$

$$(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

unde r este numărul evenimentelor din fiecare desfacere sau numărul valorilor fiecăreia dintre variabilele aleatorii ale lanţului.

Probabilitatea condiţionată $P_{E_j^l}(E_k^n)=P_{jk}(l,\ n)$ poartă încă numele de *probabilitate de trecere* de la evenimentul E_j în momentul l, la evenimentul E_k în momentul $n\,(n>l)$.

Deoarece

$$P_{jk}(l,\ l)=\begin{cases} 1 & j=k, \\ 0 & j\neq k, \end{cases}$$

relaţiile (5) sînt compatibile cu aceste valori şi dacă $m=l$, sau $n=l$, sau încă $l=m=n$; prin urmare, ele sînt valabile şi pentru aceste cazuri.

Probabilităţile de trecere $P_{jk}(l,\ n)$ $(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ sînt elementele unei matrice

$$P(l,\ n)=\|\,P_{jk}(l,\ n)\,\|, \qquad (6)$$

iar relaţiile (5) se pot scrie

$$P(l,\ n)=P(l,\ m)\,P(m,\ n); \qquad l\leqslant m\leqslant n. \qquad (7)$$

Pentru determinarea matricei $P(l,\ n)$, oricare ar fi l şi n, este necesar şi suficient să fie date matricele

$$p(l)=P(l,\ l+1) \qquad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (8)$$

In adevăr,

$$P(l,\ l+k)=p(l)\,p(l+1)\ldots p(l+k-1), \qquad (9)$$

deoarece din (7) rezultă că

$$P(l,\ l+k)=P(l,\ l+1)\,P(l+1,\ l+2)\ldots P(l+k-1,\ l+k).$$

4. *Lanţ Markov omogen sau permanent. Un lanţ Markov este omogen dacă probabilităţile de trecere depind numai de intervalul de timp* $(n-l)$; urmează

$$P_{jk}(l,\ n)=P_{jk}(n-l).$$

Relaţiile Chapman se scriu în acest caz

$$P_{jk}(n+m)=\sum_h P_{jh}(n)\,P_{hk}(m); \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r), \qquad (10)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde n și m sînt întregi, iar relația (7) devine

$$P(n+m)=P(n)\,P(m). \tag{11}$$

In acest caz, lanțul este determinat de o singură matrice

$$p=P(l,\ l+1)=P(1) \tag{12}$$

și ne dă

$$P(n)=p^n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\dots). \tag{13}$$

5. *Proprietățile matricei fundamentale p.* Matricea p are ca elemente probabilitățile de trecere $p_{jk}=P_{jk}(1)$, cu proprietățile generale

$$p_{jk}\geq 0;\ \sum_{k=1,\ 2,\ \dots,\ r} p_{jk}=1. \tag{14}$$

Ecuația caracteristică a matricei p

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \dots & p_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr}-\lambda \end{vmatrix} \tag{15}$$

are următoarele proprietăți.

1°. $D(1)=0$.

2°. $|\lambda|\leq 1$ pentru fiecare rădăcină λ a ecuației.

Prima proprietate este evidentă: dacă în determinantul $D(\lambda)$ înlocuim pe λ cu 1, adunăm termenii tuturor coloanelor la cei ai coloanei întîi și ținem seama de (14), obținem zero pentru întreaga primă coloană.

Pentru a demonstra cea de a doua proprietate observăm că, dacă $D(\lambda_j)=0$, sistemul

$$pl_1x^1+pl_2x^2+\dots+pl_rx^r=\lambda_j x^l \quad (l=1,\ 2,\dots,r) \tag{16}$$

este compatibil. Fie $x^1,\ x^2,\dots,x^r$ o soluție a acestui sistem și x^k aceea dintre valorile $x^1,\ x^2,\dots,x^r$, care are modulul maxim. Vom avea deci

$$\left|\frac{x^h}{x^k}\right|=\rho_k^h \quad \text{cu} \quad |\rho_k^h|\leq 1 \quad (h=1,\ 2,\dots,r).$$

Dar atunci, folosind și (14),

$$|\lambda_j|\leq \sum_h p_{kh}\rho_k^h \leq \sum \rho_{hk}=1. \tag{17}$$

Vom demonstra următoarea teoremă, privind rădăcinile al căror modul este egal cu unitatea.

Teoremă. Rădăcinile ecuației $D(\lambda)$ *care au modulul egal cu* 1 *sînt rădăcinile unei ecuații binome* $\lambda^s - 1 = 0$.

Observăm că, presupunînd $|\lambda_j| = 1$, relația (17) se transformă în egalitatea

$$1 = \sum_h p_{kh} \rho_k^h,$$

de unde $\rho_k^h = 1$ pentru toți h pentru care $p_{kh} \neq 0$. Avem deci

$$|x_{h_1}| = |x_{h_2}| = \ldots = |x_{h_s}| = \rho.$$

Vom pune atunci

$$\lambda_j = e^{i\omega_j}; \quad x_h = \rho e^{i\theta_h} \quad (h = h_1, h_2, \ldots h_s).$$

Cu acestea, ecuațiile (16) devin

$$\sum_h p_{kh} e^{i\theta_h} = e^{i(\omega_j + \theta_k)}.$$

De aici rezultă

$$\sum_h p_{kh} \cos \theta_h = \cos(\omega_j + \theta_k),$$

$$\sum_h p_{kh} \sin \theta_h = \sin(\omega_j + \theta_k),$$

de unde deducem imediat

$$\sum_k p_{kh} \cos(\theta_h - \theta_k - \omega_j) = 1,$$

pentru fiecare h pentru care $p_{kh} \neq 0$.

Fie acum un ciclu *posibil de evenimente* $E_k, E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_{s-1}}, E_k$, presupunînd că $h_1, h_2, \ldots, h_{s-1}$ sînt distincte între ele și distincte de k. Ciclul este posibil dacă $p_{kh_1} \neq 0$, $p_{h_1 h_2} \neq 0$ $p_{h_2 h_3} \neq 0, \ldots, p_{h_s k} \neq 0$. In acest caz, sînt aplicabile ecuațiile

$$\theta_{h_1} = \theta_k - \omega_j = 2N_{k,h}\pi; \quad \theta_{h_2} - \theta_{h_1} - \omega_j = 2N_{h_1, h_2}\pi, \ldots$$

$$\ldots, \theta_k - \theta_{h_{s-1}} - \omega_j = 2N_{h_{s-1}k}\pi. \tag{18}$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$s\omega_j = 2N\pi.$$

Teorema este astfel demonstrată.

6. *Analiza sistemului de evenimente.* Ţinînd seama de probabilităţile fundamentale p_{jk} vom putea despărţi, în anume cazuri, sistemul $E_1, E_2, \ldots, E_r$ în subsisteme fără legătură unele cu altele, sau cu un anumit fel de legătură care urmează să fie precizată.

Sistem şi matrice indecompozabile. Dacă, date fiind două evenimente oarecare ale sistemului E_j şi E_k, există un şir de evenimente distincte de precedentele şi distincte între ele, $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_{l-1}}$, astfel că

$$p_{jj_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{l-1}k} \neq 0,$$

sistemul şi *matricea* sînt *indecompozabile.*

Este evident că, în acest caz, există un ciclu pentru orice eveniment E_j, adică există o succesiune $E_j, E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_s, E_j$ pentru care $p_{jh} p_{h_1 h_2} \ldots p_{h_s j} \neq 0$, astfel că $E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_s}, E_j$ sînt toate distincte între ele.

In adevăr, fie E_k un eveniment oarecare distinct de E_j. Fie $L_{jk}(E_j, E_{l_1}, \ldots, E_{l_k} E_k)$ unul dintre drumurile simple care duc de la E_j la E_k. Există, de asemenea, cel puţin un drum simplu L_{kj}, care duce de la E_k la E_j, eventual chiar drumul $E_k E_j$. Dacă L_{kj} şi L_{jk} nu au nici un punct comun, succesiunea lor (L_{jk}, L_{kj}) constituie un ciclu pentru E_j. Dacă ele au evenimente comune în afară, bine înţeles, de E_j şi E_k, fie E_{h_i} ultimul eveniment comun cu L_{jk} în drumul L_{kj}. In acest caz, succesiunea drumurilor $L_{jl_i}, L_{l_i j}$ este un ciclu. Este evident că acest ciclu se poate reduce la $E_j E_k E_j$.

Există cicluri în care se parcurg toate evenimentele cîmpului, însă în general, atari cicluri sînt simple:

Exemplu de sistem indecompozabil. Presupunem

$$p = \begin{Vmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{Vmatrix},$$

unde $p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32} \neq 0$. In acest caz

$$D(\lambda) \equiv -\lambda^3 + (p_{12}p_{21} + p_{23}p_{32} + p_{31}p_{13})\lambda + p_{13}p_{21}p_{32} + p_{12}p_{23}p_{31}.$$

Cele trei rădăcini sînt

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a},\quad \lambda_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}$$

cu

$$a=1-p_{13}-p_{21}-p_{32}+p_{21}p_{32}+p_{13}p_{32}+p_{13}p_{21}.$$

Ţinînd seama că $p_{12}+p_{13}=1$, $p_{21}+p_{23}=1$, $p_{31}+p_{32}=1$, rezultă că $|\lambda_2|<1$, $|\lambda_3|<1$.

Sistem decompozabil. Sistem separat. Sistem final. Sistem de trecere. Dacă condiţiile precedente nu sînt îndeplinite, sistemul este *decompozabil.* Iată un exemplu: avem şapte evenimente E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7. Probabilităţile de trecere constituie matricea

$$p=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} \\ 0 & 0 & 0 & p_{74} & p_{75} & p_{76} & p_{77} \end{Vmatrix},$$

unde probabilităţile care figurează ca atare sînt toate diferite de zero.

Sistemul este decompozabil.

In general, dacă p este decompozabilă, putem da evenimentelor o ordine convenabilă, astfel ca matricea p să prezinte următoarea formă canonică:

$$p=\begin{Vmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_{l-1} & 0 \\ q_1 & q_2 \dots & q_{l-2} & q_{l-1} & p_l \end{Vmatrix},$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_{l-1}, p_l$ sînt matrice indecompozabile, iar $q_1, q_2, \dots, q_{l-1}$ sînt matrice care nu sînt toate nule.

Evenimentele care corespund uneia dintre matricele p_j ($j=1, 2, \dots, l-1$) constituie un *sistem separat* sau un *sistem final*, după cum matricea q_j corespunzătoare este nulă sau nu.

Scanned with OKEN Scanner

Evenimentele care corespund matricei p_{ij}, dacă există sisteme finale, constituie un *sistem de trecere*. In exemplul precedent, evenimentele E_1, E_2, E_3 constituie un sistem *izolat:* probabilitatea de trecere de la unul dintre aceste evenimente la altul, sau reciproc, este nulă. Sistemul E_4, E_5, fără să fie izolat, este *final*. Probabilitatea de a ieşi din acest sistem este nulă, dar probabilităţile de intrare ca, de exemplu, p_{64}, p_{65}, p_{74}, p_{75}, diferite de zero există.

Sistemul E_6, E_7 este numai un *sistem de trecere*. Există şi probabilităţi de intrare şi probabilităţi de ieşire din sistem.

Se poate demonstra că probabilitatea de a rămîne indefinit într-un sistem final este diferită de zero, iar probabilitatea de a rămîne într-un sistem de trecere este nulă.

Decompozabilităţii matricei p îi corespunde o descompunere a lui $D(\lambda)$. De exemplu, în cazul matricei precedente, avem:

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} p_{44}-\lambda & p_{45} \\ p_{54} & p_{55}-\lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_{66}-\lambda & p_{67} \\ p_{76} & p_{77}-\lambda \end{vmatrix} = D_1(\lambda)\, D_2(\lambda)\, D_3(\lambda).$$

Ecuaţiile $D_1(\lambda)=0$, $D_2(\lambda)=0$, care corespund *sistemelor izolate* sau *finale*, au proprietăţile corespunzătoare unei matrice indecompozabile.

Ecuaţia $D_3(\lambda)=0$, corespunzătoare *sistemului de trecere*, nu are rădăcini de modul egal cu unitatea.

7. *Problema ergodică pentru sistemele indecompozabile.* Problema comportării probabilităţilor $P_{jk}(n)$ pentru $n\to\infty$ este numită şi *problema ergodică*. Cel mai simplu dintre modurile de comportare a probabilităţilor $P_{jk}(n)$ pentru $n\to\infty$ este convergenţa către o limită:

$$\lim_{n\to\infty} P_{jk}(n)=P_{jk} \quad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{19}$$

Acelaşi lucru se scrie mai simplu

$$\lim_{n\to\infty} p^n=P, \tag{20}$$

P fiind matricea ai cărei termeni sînt P_{jk}. Este evident că

$$P=\lim p^{n+1}=\lim p\cdot p^n=p\cdot\lim p^n=p\cdot P \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

și tot astfel

$$P=Pp.$$

Prin urmare, *dacă există, limita P verifică ambele relații:*

$$P=Pp;\quad P=pP. \tag{22}$$

Prima dintre cele două relații ne dă ecuațiile

$$P_{jk}=\sum_h p_{jh}P_{hk} \quad j,\ k=1,\ 2,\ldots,r, \tag{23}$$

iar cea de a doua ne dă

$$P_{jk}=\sum_h P_{jk}p_{hk}. \tag{24}$$

Al doilea sistem de ecuații se scrie explicit

$$\left.\begin{aligned}
&(p_{11}-1)P_{j1}+p_{21}P_{j2}+\ldots+p_{r1}P_{jr}=0,\\
&p_{12}P_{j1}+(p_{22}-1)P_{j2}+\ldots+p_{r1}P_{jr}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{1r}P_{j1}+p_{2r}P_{j2}+\ldots+(p_{rr}-1)P_{jr}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Determinantul sistemului (24) este $[D(\lambda)]_{\lambda=1}=0$, deci sistemul este compatibil.

Să observăm că $\lambda=1$ este o rădăcină simplă a ecuației $D(\lambda)=0$, deci $\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}\neq 0$. Deoarece

$$\left(\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=1}=\sum_j \pi_j,$$

unde π_j este minorul elementului $p_{jj}-1$ în determinantul $D(1)$, urmează că cel puțin unul dintre minorii π_j este diferit de 0. Fie, de exemplu, $\pi_r\neq 0$. Rezultă atunci că primele $r-1$ ecuații (25) ne dau

$$P_{jk}=\lambda_k P_{jr} \quad k=1,\ 2,\ldots,\ r-1, \tag{26}$$

unde $\lambda_k=\frac{Q_k}{\pi_r}$ iar Q_k sînt diferiții determinanți ai coeficienților din primele $r-1$ ecuații ale sistemului (25): $\lambda_k\ (k=1,\ 2,\ldots,r-1)$ nu depind de j, deci P_{jk} *nu depind de* j.

Scanned with OKEN Scanner

Completăm sistemul (26) prin condiția $\sum_1^r{}_k P_{jk}=1$ și obținem:

$$\left(\sum_1^{r-1}{}_k \lambda_k+1\right) P_{jr}=1.$$

Sîntem în ipoteza (19), deci P_{jr} există; prin urmare, $1+\sum_1^{r-1}{}_k \lambda_k \neq 0$:

$$P_{jr}=\frac{1}{1+\sum \lambda_k}. \tag{27}$$

Membrul al doilea nu depinde de j, deci P_{jr} nu depinde de j, deci ținînd seama de (26)

$$\lim P_{jk}(n)=P_{jk}=P_k. \tag{28}$$

Dacă limita probabilităților $P_{jk}(n)$ există, această limită este *independentă de starea inițială* j.

Lanțul este în acest caz ergodic: $P_{jk}(n)$ are pentru fiecare k o limită care nu depinde de evenimentul inițial. Aceste relații ale sistemului (25) verifică automat ecuațiile (23).

8. *Metodă operațională pentru examinarea existenței limitei.* Matricea p poate fi considerată ca un *operator* în transformarea liniară

$$x'=px,$$

unde x și x' sînt vectori. Rădăcinile ecuației caracteristice $D(\lambda)=0$ sînt valorile proprii ale operatorului, deci valorile pentru care

$$px=\lambda x.$$

Am arătat că aceste valori au modulul mai mic sau egal cu unitatea. După o cunoscută, teoremă de algebră, vom avea:

$$P_{jk}(n)=\sum_h \frac{1}{(\nu_h-1)!}\frac{d^{\nu_h-1}}{d\lambda^{\nu_h-1}}\left[\frac{\lambda^n D_{jk}(\lambda)}{\psi_h(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_h}, \tag{29}$$

unde $D_{ik}(\lambda)$ este minorul elementului din linia k și coloana j în $D(\lambda)$ și

$$\psi_h(\lambda)=\frac{D(\lambda)}{(\lambda-\lambda_h)^{\nu_h}},$$

ν_j fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_j:

$$D(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{\nu_1}(\lambda_2-\lambda)^{\nu_2}\dots(\lambda_s-\lambda)^{\nu_s}.$$

Rădăcinile al căror modul este unu sînt simple, deci vom putea separa în formula (29) aceste rădăcini de cele al căror modul este mai mic decît unu:

$$P_{jk}(n)=\frac{D_{jk}(1)}{D'(1)}+\lambda_2^n\frac{D_{jk}(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)}+\dots+\lambda_k^n\frac{D_{jk}(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}+H_{jk}(n), \qquad (30)$$

unde $|H_{jk}(n)|\to 0$ cînd $n\to\infty$.

Formula (30) ne dă următorul rezultat asupra comportării asimptotice a probabilităţilor $P_{jk}(n)$:

dacă $\lambda_1=1$ este singura rădăcină cu modulul unu, avem:

$$\lim_{n\to\infty}P_{jk}(n)=\frac{D_{jk}(1)}{D'(1)};$$

dacă există şi alte rădăcini cu modulul unu: $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$, *atunci* $P_{jk}(n)$ *este, asimptotic, o sumă de termeni periodici de* n.

9. *Teorema lui M. Fréchet.* Din (30) rezultă imediat teorema lui *M. Fréchet* de convergenţă în medie a probabilităţilor $P_{jk}(n)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n{}_l P_{jk}(n)=P_k$$

sau încă

$$\lim_{n\to\infty}\sum_1^n{}_l p^l=P,$$

care este o teoremă ergodică pentru operatorul p.

10. *Mişcarea lui Rayleigh.* Matricea p în exemplul lui Rayleigh este

$$p=\left\|\begin{array}{ccccccccc}
0 & p_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & q_1 \\
q_2 & 0 & p_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & q_3 & 0 & p_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\
p_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & q_n & 0
\end{array}\right\|.$$

Sistemul de evenimente este indecompozabil dacă $p_1q_1p_2q_2\cdots p_nq_n\neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Tocmai din această condiție rezultă că evenimentele sistemului pot constitui un ciclu unic. Prin urmare, dacă există rădăcini al căror modul este unu, ele sînt și rădăcini ale ecuației $\lambda^n-1=0$, deci sînt rădăcinile comune între ecuațiile $\lambda^n-1=0$, $D(\lambda)=0$.

Dacă, în particular, $n-1$ este număr prim, deci $\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}$ este un polinom indecompozabil și el nu poate avea o rădăcină comună cu $\frac{D(\lambda)}{\lambda-1}$ fără a fi identic cu acest polinom. Prin urmare, ar rezulta $D(\lambda)\equiv(-1)^n(\lambda^n-1)$. Ar rezulta atunci că

$$D(0)=(-1)^{n+1},$$

ceea ce este imposibil. Deci p^N are o limită determinată cînd $N\to\infty$.

11. *Lanț constant. Lanț periodic.*

Definiție. Un lanț Markov este constant dacă matricea sa, considerată ca operator, este idempotentă:

$$p^r=p.$$

Lanțul este periodic dacă există un întreg $m>2$ pentru care

$$p^m=p.$$

Un exemplu de lanț constant este dat de matricea p cu m linii egale:

$$p_{ik}=p_k.$$

Un exemplu de lanț periodic este dat de matricea formată din zero și unu:

$$p=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

pentru care avem $p^q=p$.

In primul caz, presupunem

$$p=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \quad p_1>0,\quad p_2>0,\quad p_3>0;\quad p_1+p_2+p_3=1.$$

Avem:

$$D(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1).$$

Potrivit formulei lui Perron, ținînd seama că $\lambda=0$ este o rădăcină dublă, avem

$$P_{jk}(n)=\frac{D_{jk}(1)}{D'(1)}+\left\{\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\lambda^n D_{jk}(\lambda)}{\lambda-1}\right]\right\}_{\lambda=0}.$$

Se obține, efectuînd calculele,

$$P_{jk}(n)=p_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3).$$

Pentru lanțul periodic: $D(\lambda)=1-\lambda^3$. Cele trei rădăcini sînt simple și toate cu modulul unu: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\lambda_3=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

In acest caz, probabilitățile $P_{jk}(n)$ sînt periodice:

$$P_{jk}(n)=\frac{D_{jk}(1)}{D'(1)}+e^{\frac{2n\pi}{3}i}\frac{D_{jk}(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)}+e^{-\frac{2n\pi}{3}i}\frac{D_{jk}(\lambda_3)}{D'(\lambda_3)}.$$

Obținem, de exemplu, valorile

$$P_{jj}(n)=\frac{1}{3}\left[1+2\cos\frac{2n\pi}{3}\right].$$

§ 8. Reversibilitatea și stabilitatea procesului în lanț

1. Reversibilitatea proceselor dinamice nu este o caracteristică proprie acestor procese. Procesele în lanț sînt de asemenea reversibile. Dar forma specific aleatorie în care această reversibilitate funcționează este diferită de forma ei dinamică, rigidă. In dinamică, traiectoriile mișcării sînt aceleași, sensul lor de parcurs diferă. Intr-un proces înlănțuit, lanțul însuși se schimbă. Ceea ce rămîne este numai caracterul de lanț simplu care indică legătura de la eveniment la eveniment.

Probabilitatea cauzelor urmează același fel de lege stochastică ca și probabilitatea efectelor. Nu aceeași lege, dar același tip de lege. Dacă trecerea la efecte se face cu probabilitățile unui lanț Markov simplu, trecerea de la efecte la cauze se face de asemenea cu probabilitățile unui lanț Markov simplu, diferite în general de primele.

Fără a avea rigiditatea reversibilității dinamice, procesul în lanț îngăduie cercetarea statistică a cauzelor, deci explicarea fenomenelor corespunzătoare.

Problema reversibilității unui proces stochastic a fost rezolvată pozitiv, aproape în aceeași vreme, de A. N. Kolmogorov pentru lanțurile continue și de Gh. Mihoc, împreună cu autorul

acestei cărți, pentru lanțurile cu timpi discontinui. Studii aprofundate, în deosebi pentru lanțurile continue, au fost efectuate de Potoček și în special de A. M. Iaglom.

Ne mărginim aici să prezentăm teorema reversibilității în cazul timpului discontinuu, precum și legătura între reversibilitate și stabilitatea unui atare proces în cazul lanțului Markov simplu, rezervînd un alt paragraf pentru lanțurile multiple.

2. *Lanțul invers unui lanț dat.* Fie $E^n_{l_n}$ ($n=1, 2, \ldots$; $l_n = 1, 2, \ldots, m$) o succesiune de evenimente ale unui lanț Markov simplu.

Vom avea, aplicînd formula (4), § 2, și ținînd seama că evenimentele formează un lanț Markov simplu:

$$P(E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}) = P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}).$$

De asemenea, prin aplicarea aceleiași formule:

$$P(E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}) = P(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}).$$

Deci,

$$P(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}) =$$

$$= P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}). \qquad (1)$$

In același mod, printr-o dublă aplicare a formulei (4), § 2, la probabilitatea $P(E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}})$ găsim egalitatea

$$P(E^{n+2}_{l_{n+2}})\, P_{E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^{n+1}_{l_{n+1}}) = P(E^{n+1}_{l_{n+1}})\, P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}). \qquad (2)$$

Divizînd membru cu membru în (1) și (2), găsim:

$$P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}) = \frac{P(E^n_{l_n})\, P_{E^n_{l_n}}(E^{n+1}_{l_{n+1}})}{P(E^{n+1}_{l_{n+1}})}. \qquad (3)$$

Este deci evident că membrul al doilea nu depinde de $E^{n+2}_{l_{n+2}}$, de unde

$$P_{E^{n+1}_{l_{n+1}} \cap E^{n+2}_{l_{n+2}}}(E^n_{l_n}) = P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^n_{l_n}). \qquad (4)$$

Deci, procesul invers este de asemenea un proces Markov simplu. Rămîne să arătăm că nu este degenerat, deci că mem-

brul al doilea din (3) depinde efectiv de $E_{l_{n+1}}^{n+1}$. Presupunem că nu ar fi aşa. Atunci raportul

$$\frac{P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})}{P(E_{l_{n+1}}^{n+1})}=\lambda \tag{5}$$

nu depinde de $E_{l_{n+1}}^{n+1}$. Deci, dacă în egalitatea

$$P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})=\lambda P(E_{l_{n+1}}^{n+1})$$

însumăm în ambii membri faţă cu l_{n+1}, găsim:

$$\sum_{l_{n+1}=1,\,2,\,\ldots,\,m} P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})=\lambda \sum_{l_{n+1}=1,\,2,\,\ldots,\,m} P(E_{l_{n+1}}^{n+1}),$$

de unde

$$1=\lambda;$$

aceasta ar însemna, însă, ţinînd seama de (5) că

$$P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})=P(E_{l_{n+1}}^{n+1}),$$

deci însuşi lanţul originar ar fi degenerat.

Deci, pentru probabilităţile lanţului invers, ţinînd seama de (3) şi notînd

$$P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n)=P^*_{h,\,k}(n+1,\,n)\quad (h=l_{n+1},\ k=l_n), \tag{6}$$

vom avea relaţia

$$P^*_{h,\,k}(n+1,\,n)=\frac{P(E_k)}{P(E_h)}P_{k,\,h}(n,\,n+1), \tag{7}$$

presupunînd, bine înţeles, că $P(E_h)\neq 0$ pentru $h=1,\,2,\ldots,\,m$.

3. *Stabilitatea procesului. Familia de lanţuri ale unui proces.* Noi considerăm un proces Markov simplu ca fiind determinat de matricele probabilităţilor de trecere $p_{h,\,k}(n,\,n+1)$. Probabilităţile absolute ale diferitelor evenimente $P(E_h^n)=P_h^{(n)}$ sînt determinate de probabilităţile iniţiale $P_h^0\,(h=1,\,2,\ldots,\,m)$ prin legea de recurenţă:

$$P_h^{(n+1)}=\sum_{j=1,\,2,\,\ldots,\,m} P_j^{(n)}p_{jh}(n,\,n+1)\qquad (h=1,\,2,\ldots,\,m). \tag{8}$$

Valorile $P_h^{(0)}$ sînt arbitrare, în afară de condițiile generale

$$P_h^{(0)} \geq 0 \qquad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} P_h^{(0)} = 1.$$

Pentru fiecare sistem $P_h^{(0)}$ $(h=1, 2, \ldots, m)$ avem un lanț determinat. Se pune problema de a determina, în familia de lanțuri astfel caracterizată, lanțurile stabile care se pot împărți în două categorii:

a) lanțurile *invariante*, pentru care

$$P_h^{(n)} = P_h^{(0)} \qquad (h=1, 2, \ldots, m;\ n=1, 2, \ldots);$$

b) lanțurile *periodice*, pentru care există un N astfel că

$$P_h^l = P_h^n \ (h=1, 2, \ldots, m), \quad \text{deci} \quad l-n=RN.$$

Această problemă a fost studiată sub un aspect diferit în cazul procesului omogen, cînd, deci,

$$p_{jh}(n, n+1) = p_{jh}(0, 1) = p_{jh} \qquad (j, h=1, 2, \ldots, m),$$

sînt independente de n.

Relația (8) devine în acest caz

$$P_h^{(n+1)} = \sum P_j^{(n)} p_{jh} \qquad (h=1, 2, \ldots, m)$$

de unde rezultă că

$$P_h^{(n)} = \sum_j P_j^{(0)} p_{jh}^{(n)}, \tag{9}$$

$p_{jh}^{(n)}$ fiind elementele matricei $p^{(n)} = \| p_{jh} \|^n$.

Pentru a da unele rezultate precise, vom presupune că *sistemul de evenimente* care participă la proces *este final* și vom considera două cazuri:

a) Singura rădăcină de modul unu a ecuației caracteristice $D(\lambda)=0$ este $\lambda=1$.

In acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} p_{jh}^{(n)} = \Pi_h, \qquad h=1, 2, \ldots, m.$$

Relația (9) ne dă atunci

$$\lim_{n\to\infty} P_h^{(n)} = \Pi_h \sum_j P_j^{(0)} = \Pi_h.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\Pi_h = \sum_j \Pi_j \, p_{jh},$$

lanțul pentru care $p_j^{(c)} = \Pi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ este *invariant*, deci stabil, și în același timp *este lanțul către care tind asimptotic toate celelalte.*

b) Există o singură rădăcină simplă egală în modul cu unu, în afară de unu; fie această rădăcină $\lambda = e^{i\theta}$ cu $\theta = \frac{2\pi}{k}$. Potrivit formulei (30) folosită de mai multe ori, relația (9) devine

$$P_h^{(n)} = \sum_j P_j^{(0)} \left[\frac{1}{D'(1)} D_{hj}(1) + e^{in\theta} \frac{1}{D'(e^{i\theta})} D_{hj}(e^{i\theta}) + H_{jh}(n) \right],$$

unde $H_{jh}(n) \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Oricare dintre lanțuri este deci asimptotic unui lanț periodic corespunzător

$$\Pi_h^{(n)} = \sum_j P_j^{(0)} \left[\frac{1}{D'(1)} D_{hj}(1) + e^{in\theta} \frac{1}{D'(e^{i\theta})} D_{hj}(e^{i\theta}) \right],$$

care de asemenea aparține familiei, cum se verifică imediat. Dacă $P_j^{(0)}$ verifică sistemul evident compatibil,

$$\sum_j P_j^{(0)} D_{hj}(e^{i\theta}) = 0,$$

lanțul este asimptotic lanțului constant ale cărui probabilități absolu'e sînt egale cu

$$\frac{1}{D'(1)} \sum_j P_j^{(0)} D_{hj}(1).$$

In general, probabilitățile elementare p_{jk}^n ale unui lanț variabil, nu sînt distribuite fără nici o regulă. Variația cu n a acestor probabilități urmează anumite legi și, în genere are o anumită uniformitate. Cazul cel mai important și cu relații mai strînse cu aplicațiile este acela în care există o periodicitate

$$p_{jk}^n = p^{hT+n},$$

unde T este perioada

$$0 \leq n < T.$$

In foarte multe împrejurări, se presupune doar o anumită uniformitate asimptotică.

Scanned with OKEN Scanner

Semnalăm aici numai cazul în care există un număr pozitiv α, pentru care

$$p_{jk}^{m} \geq \alpha > 0 \tag{10}$$

pentru orice m, oricare ar fi j și k.

Teoremă. Dacă condiția (10) *este îndeplinită, lanțul este ergodic în sensul că*

$$\lim_{n\to\infty} | P_{jk}(n) - P_{hk}(n) | = 0, \tag{11}$$

cu j, h, k oarecare.

§ 9. Reacții în lanț

1. *Generalități.* Numeroase reacții chimice în lanț ca și unele procese fizice sau biologice purtînd asupra unui sistem de particule elementare sînt susceptibile de interpretare prin lanțuri Markov, care poartă numele de *lanțuri* sau *procese stochastice ramificate.*

Cel dintîi exemplu este dat de reacția fotochimică în lanț, care duce la formarea acidului clorhidric din moleculele izolate de hidrogen și clor.

Această reacție în lanț, sub influența unei cuante de lumină, are forma următoare:

$$\left.\begin{aligned} Cl_2 + h\nu &= Cl + Cl, \\ Cl + H_2 &= H + HCl, \\ H + Cl_2 &= Cl + HCl, \\ Cl + H_2 &= H + HCl. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sub influența unei cuante de lumină, molecula de Cl se desface în doi atomi de Cl; fiecare dintre acești atomi, în prezența moleculei de H, o desface, eliberează un atom de H și constituie o moleculă de HCl; atomul de hidrogen eliberat, în prezența unei molecule de Cl, o desface, eliberează un atom de Cl și constituie o moleculă de HCl și așa mai departe Procesul poate fi considerat teoretic infinit. El se întrerupe numai cînd atomul de Cl sau de H întîlnește impurități sau lovește pereții vasului, unde condițiile sînt alterate.

Evenimentele al căror lanț îl avem în considerare aici sînt apariția atomilor de Cl și H și a moleculei de HCl. Le vom nota e_1, e_2, e_3. Celelalte elemente ale reacțiilor constituie numai ocazii sau circumstanțe ale procesului chimic.

Scanned with OKEN Scanner

Succesiunea de evenimente descrisă la (1) se mai poate scrie, în aceste notaţii

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \to e_2 + e_3 \\ e_2 \to e_1 + e_3 \\ e_1 \to e_2 + e_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Vom presupune că reacţiile elementare se petrec într-un interval de timp care nu variază de-a lungul procesului şi vom lua acest interval drept unitate de măsură a timpului.

Observăm că numeroase reacţii chimice în lanţ trebuie considerate ca lanţuri omogene: durata reacţiei este independentă de momentul în care începe.

Să considerăm o reacţie de lanţ, purtînd asupra unui număr r de tipuri de elemente.

Evenimentele care constituie obiecte ale cercetării sînt:

1°. Cele pe care le vom nota vectorial $(a)=(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ şi ne arată că avem în prezenţă a_1 particule de speţa întîia, a_2 particule de speţa a doua, $\ldots$, a_r particule de speţa r.

2°. Reacţiile, sau sistemele de reacţii, care se vor nota cu $E_{(a),(b)}(l)$ şi care arată procesul sau mulţimea de procese care în intervalul 1 duce de la sistemul (a) la sistemul (b).

Reacţiile elementare ale procesului sînt în număr finit, şi în general, de tipul (2): *de la o particulă se trece la un sistem.* De aceea, procesele respective se numesc ramificate.

Intreg procesul este o suprapunere de reacţii elementare $E_{j,(b)}$ (1), concomitente sau succesive.

Caracterul propriu al acestor reacţii în lanţ este dat de independenţa reacţiilor elementare între ele, fie că sînt *concomitente*, fie că sînt *succesive.*

Dacă $E_{j,(\omega)_j}(1)$ sînt reacţiile elementare ireductibile şi dacă notăm

$$P[E_{j,(\omega)_j}(1)]=P_{j,(\omega)_j}(1), \tag{3}$$

vom avea $P_{j,(b)}(1)=0$ pentru $(b)\neq\omega_j$ şi $j=(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$ [1 ocupă locul de rang j].

In acelaşi timp,

$$P[E_{j,(\omega)_j}(1)\cap E_{k,(\omega)_k}(1)]=P_{j,(\omega)_j}(1)P_{k,(\omega)_k}(1), \tag{4}$$

pentru orice $j, k=1, 2, \ldots, r$.

De exemplu, în reacția (2)

$$P_{1,(0,1,1)}(1)\neq 0,\quad P_{2,(1,0,1)}(1)\neq 0,\quad P_{1,(1,0,0)}(1)\neq 0,$$

$$P_{2,(0,1,0)}(1)\neq 0,\quad P_{3(0,0,1)}(1)\neq 0.$$

Toate celelalte probabilități $P_{1,(a)}(1)$, $P_{2,(b)}(1)$, $P_{3,(0)}(1)$, unde $a\neq\begin{cases}(0,1,1)\\(1,0,0)\end{cases}$, $b\neq\begin{cases}(1,0,1)\\(0,1,0)\end{cases}$, sînt nule.

2. *Cazul general.* Sistemul este format din r tipuri de particule $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Ipoteza fundamentală asupra procesului este următoarea:

Din cele $N_\varrho(n)$ particule de tipul e_ϱ $(\varrho=1,2,\ldots,r)$ care se găsesc libere la momentul n, un număr de $p_j(n)N_j(n)$ se transformă fiecare într-un sistem $\alpha_j=(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^r)$ de α_j^1 particule de tipul 1; α_j^2 particule de tipul $2;\ldots,\alpha_j^r$ particule de tipul r. Restul de particule rămîn libere, pentru a intra în reacție la momentul următor, împreună cu cele noi formate.

Reacția de bază a lanțului

$$e_j\to\alpha_j^1e_1+\alpha_j^2e_2+\ldots+\alpha_j^re_r=(\alpha)_j\quad j=1,2,\ldots,r$$

este deci bine caracterizată și unică și se produce cu probabilitatea $p_j(n)$.

Pentru a ne putea apropia de condițiile reale cu ale acestui tip de procese va trebui să admitem însă și o altă reacție: moartea particulelor. In cazul unui proces chimic, aceasta se produce printr-o absorbție de către perete sau printr-o reacție străină, cu impurități.

Această reacție se poate numi transformare în particule de tip ω.

Dacă numim cu $q_j(n)\cdot N_j(n)$ numărul particulelor libere de tip j care la momentul n rămîn neschimbate, vom nota prin $r_j(n)\cdot N_j(n)$ numărul acelora care se transformă în particule ω, sau, mai intuitiv, particulele care mor.

Vom avea:

$$p_j(n)+q_j(n)+r_j(n)=1.$$

In ipoteza că toate particulele trăiesc,

$$p_j(n)+q_j(n)=1.$$

Evenimentul $E_{(a),\,(b)}(1)$ este constituit dintr-o reuniune de reacţii concomitente

$$E_{(a),\,(b)}(1)=\bigcup_{\sum_j\sum_{k_j}(b)_{jh_j}=(b)}\Big[\bigcap_j^{1,\ldots,r}\Big(\bigcap_j^{1,\ldots,a_j}E_{j,\,(b)_{jk_j}}\Big)\Big]. \tag{5}$$

Folosind notaţia (3), independenţa (4) şi reuniunea (5), obţinem:

$$P_{(a),\,(b)}(1)=\sum_{\sum_j\sum_{h_j}(b)_{jh_j}=b}\prod_j^{1,\ldots,r}\Big(\prod_k^{1,\ldots,a_j}P_{j,\,(b)_{jk}}(1)\Big). \tag{6}$$

Cu acest component, $P_{(a),\,(b)}(l)$ verifică relaţiile lui Chapman-Kolmogorov:

$$P_{(a),\,(c)}(l+m)=\sum_{(b)}P_{(a),\,(b)}(l)\,P_{(b),\,(c)}(m). \tag{7}$$

Această relaţie îngăduie construirea probabilităţilor $P_{(a),\,(c)}(2)$ din $P_{(a),\,(b)}(1)$ şi $P_{(b),\,(c)}(1)$ şi, din aproape în aproape $P_{(a),\,(b)}(l)$ pentru orice întreg pozitiv.

3, *Aplicaţie la reacţia în lanţ* (2). Aşa cum se vede din (6) şi din (7), probabilităţile $P_{(a),\,(b)}(n)$ se vor constitui cu ajutorul probabilităţilor fundamentale $P_{j,\,(a)}(1)$, definite la (1).

Formula (6) ne dă în acest caz

$$P_{(a_1,\,a_2,\,a_3),\,(b_1,\,b_2,\,b_3)}(1)=$$

$$=\sum_{(b)_h+l}\prod_{h_1}^{1,\ldots a_1}P_{1,\,(b)_1,\,h_1}(1)\prod_{h_2}^{1,\ldots,a_2}P_{2,\,(b)_2,\,h_2}(1)\prod_{h_3}^{1,\ldots a_3}P_{3,\,(b)_3,\,h_3}(1).$$

Din valorile date mai sus rezultă:

$$\prod_{h_1}^{1,\ldots,a_1}P_{1,\,(b)_1,\,h_1}(1)=p_1^{k_1}q_1^{a_1-k_1}\qquad 0\leqq k_1\leqq a_1,$$

$$\prod_{h_2}^{1,\ldots,a_2}P_{2,\,(b)_2,\,h_2}(1)=p_2^{k_2}q_2^{a_2-k_2}\qquad 0\leqq k_2\leqq a_2,$$

$$\prod_{h_3}^{1,\ldots,a_3}P_{3,\,(b)_3,\,h_3}(1)=\begin{cases}1 & (b)_{3,\,h_3}=(0,0,1)\\ 0\end{cases}\quad\text{pentru}\quad h_3=1,2,\ldots,a_3,$$

Produsul acestora corespunde la $(b)=(a_1-k_1, k_1, k_1)+(k_2, a_2-k_2, k_2)+(0, 0, a_3)$, adică $(b)=(a_1-k_1+k_2, a_2-k_2+k_1, a_1-k_1+k_2+a_3)$. Va trebui deci să avem:

$$a_1-a_1+k_2=b_1; \quad a_2-k_2+k_1=b_2; \quad k_1+k_2+a_3=b_3,$$

care ne dă

$$k_2-k_1=b_1-a_1=a_2-b_2,$$
$$k_2+k_1=b_3-a_3.$$

Deci,

$$P_{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2 b_3)}(1)=$$

$$=\begin{cases} p_1^{k_1}q^{a_1-k_1}p_2^{k_2}q_2^{a_2-k_2}, & \text{dacă } \begin{cases} b_1-a_1=a_2-b_2, b_3\geq a_3, \\ 0\leq \dfrac{b_1+b_3-(a_1+a_3)}{2}\leq a_2, \\ 0\leq \dfrac{b_3-b_1-(a_3-a_1)}{2}\leq a_1, \end{cases} \\ 0, & \text{dacă condițiile de sus nu sînt realizate.} \end{cases}$$

Prin urmare aplicînd (6) găsim:

$$P_{1;\,(c_1, c_2, c_3)}(2)=\sum_{(b)}P_{1,\,(b_1, b_2, b_3)}(1)\,P_{(b_1, b_2, b_3),\,(c_1, c_2, c_3)}(1)=$$

$$=P_{1,\,(3, 0, 0)}(1)\,P_{(1, 0, 0),\,(c_1, c_2, c_3)}(1)+P_{1,\,(0, 1, 1)}(1)\,P_{(0, 1, 1),\,(c_1, c_2, c_3)}(1).$$

Din formula precedentă rezultă:

$$P_{(1, 0, 0),\,(c_1, c_2, c_3)}(1)=\begin{cases} p_1 & c_1=0, \quad c_2=1, \quad c_3=1, \\ q_1 & c_1=1, \quad c_3=0, \quad c_3=0; \end{cases}$$

$$P_{(0, 1, 1),\,(c_1, c_2, c_3)}(1)=\begin{cases} q_2 & c_1=0, \quad c_2=1, \quad c_3=1, \\ p_2 & c_1=0, \quad c_2=0, \quad c_3=2. \end{cases}$$

Restul probabilităților $P_{(0, 1, 1),\,(c_1, c_2, c_3)}(1)$ sînt egale cu zero.

Prin urmare,

$$P_{1\,(c_1, c_2, c_3)}(2)=\begin{cases} p_1q_2+q_1p_1 & c_1=0, \quad c_2=1, \quad c_3=1, \\ q_1^2 & c_1=1, \quad c_2=0, \quad c_3=0, \\ p_1p_2 & c_1=1, \quad c_2=0, \quad c_3=2. \end{cases}$$

Celelalte probabilități $P_{1(c_1, c_2, c_3)}(2)$ sînt nule.

Procedeul de construcție indicat aici ca un exemplu de calcul nu este, evident, practic. Teoremele care urmează vor

indica un mod de calcul al probabilităţilor şi de evaluare a valorii lor asimptotice, care poate fi folosit şi pentru exemple concrete.

4. *Funcţia generatoare a procesului omogen. Cazul general.* Funcţiile

$$\Phi_j(l, x)=\sum_{(n)} P_{j,(n)}(l)\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} \quad (j=1, 2, \dots, r),$$

unde $(n)=(n_1, \dots, n_r)$, iar $n_1, \dots, n_r$ iau toate valorile de la 0 la ∞, se numesc *funcţii generatoare vectoriale ale procesului.*

Următoarele proprietăţi ale componentelor Φ_k sînt evidente:

1°. $\Phi_k(l, x)$ este funcţie analitică de $x_1, x_2, \dots, x_r$ pentru $|x_h|<1$.

2°. $|\Phi_k(l, x)| \leqslant 1$ pentru $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_r| \leqslant 1$.

3° $\Phi_k(l, 1, 1, \dots, 1)=1$.

Proprietatea fundamentală a funcţiei vectoriale de componente $F_1, F_2, \dots, F_r$ este următoarea relaţie funcţională

$$\Phi(l+m;\ x)=\Phi(m;\ F(l, x)), \tag{8}$$

cu condiţia la limită

$$F(0, x)=x. \tag{9}$$

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii, să observăm că (7) implică şi relaţiile

$$P_{j,(b)}(l+m)=\sum_{(a)} P_{j,(a)}(l)\, P_{(a),(b)}(m). \tag{10}$$

Prin urmare, folosind (6),

$$P_{j,(b)}(l+m)=\sum_{(a)} P_{j,(a)}(l) \sum \prod_{h}^{1, \dots, r} \prod_{k}^{1, \dots, h_j} P_{h_j,(b)_{hk}}(m). \tag{11}$$

Potrivit definiţiei, rezultă:

$$\Phi_j(l+m, x)=\sum_{(b)} P_{j,(b)}(l+m)\, x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_r^{b_r}=$$

$$=\sum_{(a)} P_{j,(a)}(l) \sum_{(b)} \sum_{h} \sum_{k} \sum_{(b)_{hk}=(b)} \prod_{h} \prod_{k} P_{h,(b)_{hk}}\, x_1^{b_{1,hk}} x_2^{b_{2,hk}} \dots x_r^{b_{r,hk}}.$$

Insă

$$\sum_{(b)} \sum_{h} \sum_{k} \sum_{(b)_{hk}=(b)} = \sum_{h=1, 2, \dots, r} \sum_{k=1}^{a_h} \sum_{(b)_{kk}}.$$

Deci,

$$\Phi_j(l+m,x)=$$

$$=\sum_{(a)} P_{j,(a)}(l) \prod_{h=1,\dots,r} \prod_{k=1,\dots,a_l} \sum_{(b)_{hk}} \Phi_{h,(b)_{hk}}(m)\, x_1^{b_{1,hk}} x_2^{b_{2,hk}} \dots x_r^{b_{r,hk}}$$

sau

$$\Phi_j(l+m,x)=\sum_{(a)} P_{j,(a)}(l)\, \Phi_{1,m}^{a_1}(m,x)\, \Phi_2^{a_2}(m,x) \dots \Phi_r^{a_r}(m,x),$$

de unde

$$\Phi_j(l+m,x)=\Phi_j(l,\Phi(m,x)) \qquad (j=1,2,\dots,r),$$

relații echivalente cu relația vectorială unică (8).

Deoarece

$$P_{j,(a)}(0)=\begin{cases} 1 & (a)\equiv j, \\ 0 & (a)\not\equiv j, \end{cases}$$

rezultă, din definiția funcției generatoare, egalitatea (9).

Vom nota

$$\Phi_j(1,x)=\sum_{(a)} P_{j,(a)}(1)\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_r^{a_r}=\Psi_j(x).$$

Relația (8) ne dă atunci

$$\Phi(l+1,x)=\psi[\Phi(l,x)].$$

Deci, notînd cu $\psi^{(l)}(x)$ iterata de ordinul (l) a funcției $\psi(x,)$ rezultă :

$$\Phi(l,x)=\psi^{(l)}(x).$$

Primul exemplu :

$$\psi(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad-bc>0).$$

Iterata de rang l este

$$\psi^{(l)}(x)=\frac{a_l x+b_l}{c_l x+d_l},$$

unde

$$\begin{Vmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}^l.$$

Potrivit cu 3°, rădăcinile ecuației

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

sînt reale, iar dacă discriminantul ecuației a cărui valoare este $(b+c)^2$ este diferit de zero, cele două rădăcini sînt distincte.

Teorema lui Perron ne dă

$$a_n=\frac{c}{b+c}\lambda_1^n+\frac{b}{b+c}\lambda_2^n;\quad b_n=\frac{b}{b+c}\lambda_1^n-\frac{b}{b+c}\lambda_2^n;$$

$$c_n=\frac{c}{b+c}\lambda_1^n-\frac{c}{b+c}\lambda_2^n;\quad d_n=\frac{b}{b+c}\lambda_1^n+\frac{c}{b+c}\lambda_2^n.$$

Dezvoltînd în serie în raport cu x funcția $\Phi(n,x)=\frac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$, găsim:

$$P_0(n)=\frac{c\lambda_1^n-b\lambda_2^n}{b\lambda_1^n-c\lambda_2^n},\quad P_j(n)=\frac{(-c_n)^{j-1}\delta_n}{d_n^{j+1}}=(-c)^{j-1}\frac{\delta_n}{d_n^2}\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{b\lambda_1^n+c\lambda_2^n}.$$

Rezultă, fără greutate, că pentru $n\to\infty$

$$P_0(n)\to 1,\quad P_j(n)\to 0\qquad (j\geq 1).$$

Dacă $b+c=0$, avem $\lambda_1=\lambda_2$ și valoarea comună pe care o vom numi λ este $a+b=a-c$.

In acest caz,

$$a_n=(n+1)\lambda^n-nd\lambda^{n-1};\qquad b_n=nb\lambda^{n-1};$$

$$c_n=nc\lambda^{n-1};\qquad d_n=(n+1)\lambda^n-na\lambda^{n-1}.$$

Dacă presupunem $ad-bc=1$, rezultă $\lambda_1-\lambda_2=1$. Deci,

$$a_n=n+1-nd;\quad b_n=nb;\quad c_n=nc;\quad d_n=n+1-na;\qquad P_0(n)=\frac{nb}{(1-a)n+1}.$$

Cînd $n\to\infty$, $P_0(n)\to\frac{b}{1-a}=1$.

Al doilea exemplu. Construim funcția vectorială generatoare corespunzătoare procesului (2). Este evident că

$$\Phi_1(1;\ x^1,x^2,x^3)=q_1x^1+p_1x^2x^3,$$

$$\Phi_2(1;\ x^1,x^2,x^3)=q_2x^2+p_2x^1x^3,$$

$$\Phi_3(1;\ x^1,x^2,x^3)=x^3.$$

Deoarece $\Phi_3(1;\ x^1,x^2,x^3)=x^3$, vom avea, evident,

$$\Phi_3(n;\ x^1,x^2,x^3)=x^3.$$

Prin urmare, ne vom mărgini să studiem vectorul cu două dimensiuni $\psi(n; x^1, x^2)$, cu componentele $\psi_1(n; x^1, x^2) = \Phi_1(n; x^1, x^2, x^3)$ și $\psi_2(n; x^1, x^2) = \Phi_2(n; x^1, x^2, x^3)$, tratînd pe x^3 ca un parametru. Vom pune:

$$r_1 = p_1 x^3, \quad r_2 = p_2 x^3$$

și vom avea:

$$\psi_1(1; x^1, x^2) = q_1 x^1 + r_1 x^2,$$

$$\psi_2(1; x^1, x^2) = r_2 x^1 + q_2 x^2.$$

Dacă punem

$$\psi_1(n; x^1, x^2) = a_n x^1 + b_n x^2,$$

$$\psi_2(n; x^1, x^2) = c_n x^1 + d_n x^2.$$

Deoarece acest vector este a n-a iterată a vectorului precedent, vom avea egalitatea între matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} q_1 & r_1 \\ r_2 & q_2 \end{matrix} \right\|^n.$$

In acest caz, $D(\lambda) = \lambda^2 - (q_1 + q_2)\lambda + q_1 q_2 - r_1 r_2$. Discriminantul este $(q_1 - q_2)^2 + 4 r_1 r_2 = (q_1 - q_2)^2 + 4 p_1 p_2 (x^3)^2$ deci întotdeauna pozitiv. $D(\lambda)$ are două rădăcini reale și distincte λ_1, λ_2, care, pentru x^3 mai mic în modul decît unu, sînt mai mici în modul decît unu.

Prin urmare, după formula mai sus amintită

$$a_n = \frac{q_2 - \lambda_1}{D'(\lambda_1)} \lambda_1^n + \frac{q_2 - \lambda_2}{D'(\lambda_2)} \lambda_2^n, \quad b_n = \frac{r_1}{D'(\lambda_1)} \lambda_1^n + \frac{r_1}{D'(\lambda_2)} \lambda_2^n,$$

$$c_n = \frac{r_2}{D'(\lambda_1)} \lambda_1^n + \frac{r_2}{D'(\lambda_2)} \lambda_2^n, \quad d_n = \frac{q_1 - \lambda_1}{D'(\lambda_1)} + \frac{q_2 - \lambda_2}{D'(\lambda_2)} \lambda_2^n.$$

Deci, avem:

$$\Phi_1(n; x^1, x^2, x^3) = a_n x^1 + b_n x^2,$$

$$\Phi_2(n; x^1, x^2, x^3) = c_n x^1 + d_n x^2,$$

iar $P_{1,(i,j,k)}(n)$ este coeficientul termenului $(x^1)^i (x^2)^j (x^3)^k$. Deoarece putem scrie

$$a_n = \sum_s \lambda_{n,s} (x^3)^s, \quad b_n = \sum_s \mu_{n,s} (x^3)^s,$$

$$c_n = \sum_s \lambda'_{n,s} (x^3)^s, \quad d_n = \sum_s \mu'_{n,s} (x^3)^s,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$P_{1,(1,0,s)}(n)=\lambda_{n,s},\quad P_{1,(0,1,s)}(n)=\mu_{n,s},$$
$$P_{2,(1,0,s)}(n)=\lambda'_{n,s},\quad P_{2,(0,1,s)}(n)=\mu'_{n,s}.$$

Dacă, de exemplu, $n=2m$,

$$a_n=-\frac{q_2-q_1}{2}\,[C^1_{2m}a^{2m-1}+C^3_{2m}a^{2m-3}A+\ldots+C^1_{2m}A^{m-1}]+$$
$$+[a^{2m}+C^2_{2m}a^{2m-2}A+\ldots+A^m],$$

unde

$$a=\frac{q_1+q_2}{2},\quad A=\frac{q_1-q_2}{2}+p_1p_2(x^3)^2.$$

Am dat aceste calcule ca un model pentru altele similare. Aprofundarea procesului (2) este utilă numai după ce se completează procesul, introducînd și eventualitatea absorbției unora dintre particulele active Cl sau H.

5. *Reacția în lanț cu absorbție.* Procesul (2) se completează, în acest caz, introducînd și tipul de particule ω corespunzînd dispariției particulelor prin absorbție:

$e_1\to e_2+e_3$	cu probabilitatea p_1,
$e_1\to e_1$	cu probabilitatea q_1,
$e_1\to\omega$	cu probabilitatea r_1,
$e_2\to e_1+e_3$	cu probabilitatea p_2,
$e_2\to e_2$	cu probabilitatea q_2,
$e_2\to\omega$	cu probabilitatea r_2,
$e_3\to e_3$	cu probabilitatea 1,
$e_\omega\to e_\omega$	cu probabilitatea 1.

Funcția vectorială generatoare este, prin urmare,

$$\Phi_1(1,x)=p_1x_2x_3+q_1x_1+r_1x_4,$$
$$\Phi_2(1,x)=p_2x_1x_3+q_2x_2+r_2x_4,$$
$$\Phi_3(1,x)=x_3,$$
$$\Phi_4(1,x)=x_4.$$

Dacă punem

$$p_1x_3=s_1;\quad p_2x_3=s_2$$

și observăm că

$$\Phi_3(n,x)=x_3,$$

iterata a n-a a vectorului Φ este iterata a n-a a transformării

$$x_1^1 = q_1 x_1 + s_1 x_2 + r_1 x_4,$$
$$x_2^1 = s_2 x_1 + q_2 x_2 + r_2 x_4,$$
$$x_4^1 = x_4.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice $(1-\lambda)D(\lambda)=0$ sînt 1 și λ_1, λ_2 din cazul precedent. Prin urmare, dacă punem

$$x_1^{(n)} = a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_4,$$
$$x_2^{(n)} = d_n x_1 + e_n x_2 + f_n x_4,$$
$$x_4^{(n)} = x_4.$$

unde

$$a_n = A_0 + A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n; \quad b_n = B_0 + B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n;$$
$$c_n = C_0 + C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n; \quad d_n = D_0 + D_1\lambda_1^n + D_2\lambda_2^n;$$
$$e_n = E_0 + E_1\lambda_1^n + E_2\lambda_2^n; \quad f_n = F_0 + F_1\lambda_1^n + F_2\lambda_2^n,$$

avem

$$A_0 = E_0 = 0, \quad B_0 = D_0 = 1 + \frac{q_1q_2 - p_1p_2x_3^2}{(1-q_2)(1-q_1) - p_1p_2x_3^2},$$

$$C_0 = 1 + \frac{q_1q_2 - p_1p_2x_3^2 - r_1q_2 + p_1r_2x_3 + r_1}{(1-q_2)(1-q_1) - p_1p_2x_3^2},$$

$$F_0 = 1 + \frac{q_1q_2 - p_1p_2x_3^2 - r_2q_1 + p_2r_1x_3 + r_2}{(1-q_2)(1-q_1) - p_1p_2x_3^2}.$$

Să observăm că, pentru $n \to \infty$, funcția vectorială generatoare Φ devine

$$\Phi_1 = B_0x_2 + C_0x_4, \quad \Phi_3 = x^3,$$
$$\Phi_2 = B_0x_1 + F_0x_4, \quad \Phi_4 = x^4.$$

Pe aceste expresii se pot calcula probabilitățile asimptotice ale diferitelor reacții.

§ 10. Procese stochastice ramificate

1. *Definiția procesului stochastic ramificat cu timp continuu.* Reacțiile în lanț constituie, așa cum am văzut, o categorie de

procese markoviene discontinue în timp, care intră în clasa proceselor stochastice ramificate.

Vom considera acum procesul continuu în timp. Teoria proceselor ramificate înlocuieşte sistemele constituite, în principiu, dintr-un număr infinit de ecuaţii liniare, printr-una sau un număr finit de ecuaţii funcţionale sau diferenţiale neliniare. Cu toate acestea, studiul unora dintre problemele asociate sistemului este mai uşor de efectuat pe acestè ecuaţii neliniare, decît prin ecuaţiile liniare în număr infinit.

Noţiunile proprii proceselor continue sînt aceleaşi cu noţiunile pe care le-am introdus în studiul reacţiilor în lanţ. Le vom relua pentru a adăuga unele preciziuni necesare.

Fie $1, 2, \ldots, r$ cele r tipuri de particule, la care adăugăm tipul ω corespunzînd absorbţiei sau dispariţiei oricăreia dintre particule. (Absorbţia sau dispariţia se va interpreta deci ca proces de trecere a unei particule de tip determinat j într-o particulă de tip ω).

Vom deosebi mai multe clase de procese stochastice ramificate: prima clasă, ale cărei aplicaţii sînt cele mai frecvente, este caracterizată astfel:

In orice moment, o particulă e_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ preferă unul sau altul dintre următoarele trei procese:

a) rămîne neschimbată $e_j \to e_j$;

b) dispare $e_j \to e_\omega$;

c_1) se transformă într-un *complex determinat.*

In această clasă intră cele mai curente reacţii chimice în lanţ, precum şi numeroase fenomene fizice.

A doua clasă, în care partea stochastică este mai mare, se caracterizează prin aceea că procesul c se prezintă sub forma următoare:

c_2) particula e_j se transformă, cu probabilităţile respective, într-unul dintre complexele $(a)_{j,1}, (a)_{j,2}, \ldots, (a)_{j,k_j}$ numărul acestor complexe fiind în general mic, aşa cum este cazul în unele reacţii chimice în lanţ.

In sfîrşit, clasa cea mai generală este aceea pentru care putem înlocui cele trei procese printr-unul singur:

$$e_j \to (\alpha_{1,j} e_1 + \alpha_{2,j} e_2 + \ldots + \alpha_{r,j} e_r + \alpha_j \omega) \qquad (j=1, 2, \ldots, r),$$

unde $\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{r,j}$ pot avea orice valori, iar $\alpha_j = 0$ sau 1.

Vom reţine aici, atît în vederea legăturii cu fenomenele naturii cît şi pentru motive de simplitate, numai procesele din prima clasă.

Presupunem că procesul este diferențiabil, deci

$$P_{j,(a)}(t, t+\Delta)=\delta_{j,(a)}+p_{j,(a)}(t)\,\Delta+\theta(\Delta), \tag{1}$$

unde

$$\delta_{j,(a)}=\begin{cases} 1 \text{ dacă } (a)=j, \\ 0 \text{ dacă } (a)\neq j. \end{cases}$$

Procesele cu condiția (c_1), *pe care le vom cerceta, vor fi caracterizate prin egalitățile*:

$$p_{j,(a)}(t)=0 \text{ dacă } (a)\neq j,\ \omega,\ (\omega)_j. \tag{2}$$

Vom nota

$$p_{j,(\omega)_j}(t)=p_j(t);\quad q_{j,\omega}(t)=q_j(t);\quad p_{j,j}(t)=r_j(t). \tag{2'}$$

Rezultă că, dacă $(a)\neq j,\ \omega,\ (\omega)_j$, avem:

$$P_{j,(a)}(t,\ t+\Delta)=\theta(\Delta). \tag{3}$$

Este de asemenea evident că

$$p_j(t)\geq 0,\quad q_j(t)\geq 0,\quad r_j(t)<0, \tag{4}$$
$$p_j(t)+q_j(t)+r_j(t)=0.$$

2. *Ecuațiile diferențiale ale procesului.* Egalitățile (1) cu condițiile (2), (3), (4) conduc la următoarele sisteme de ecuații diferențiale

$$\frac{\partial P_{j,(a)}(s,t)}{\partial s}=-r_j(s)\,P_{j,(a)}(s,t)-p_j(s)\,P_{(\omega)_j,(a)}(s,t)\quad (a)\neq\omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial P_{j,\omega}(s,t)}{\partial s}=-r_j(s)\,P_{j,\omega}(s,t)-q_j(s)-p_j(s)\,P_{(\omega)_j,\omega}(s,t), \tag{6}$$

deoarece $P_{\omega,(a)}(s,t)=0$, dacă $(a)\neq\omega$, și $P_{\omega,(a)}(s,t)=1$, dacă $(a)=\omega$. Folosind formula (6), acest sistem se poate încă scrie

$$\frac{\partial P_{j,(a)}(s,t)}{\partial s}=$$

$$=-r_j(s)\,P_{j,(a)}(s,t)-p_j(s)\sum_{\Sigma\Sigma(c)_{hk}=(a)}\ \prod_{h}^{1,\ldots,r}\ \prod_{k}^{1,\ldots,\omega_{hj}} P_{h(c)_{hk}}(s,t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial P_{j,\omega}(s,t)}{\partial s}=-r_j(s)\,P_{j,\omega}(s,t)-q_s(s)-p_j(s)\prod_{h}^{1,\ldots,r}P_{h,\omega}(s,t), \tag{8}$$

iar pentru $s=t$, presupunînd $P_{j,(a)}(t,t)=0$, dacă $(a)\neq j$, avem $P_{jj}(t,t)=1$.

Integrarea acestui sistem de ecuații se face, așa cum rezultă din structura lui, din aproape în aproape. În adevăr, dacă probabilitățile $P_{j,(\alpha)}(s,t)$, $(j=1,2,\ldots,r)$ sînt cunoscute pentru $|\alpha|<|a|$, atunci ultimul termen din ecuația (7) este o funcție cunoscută pentru orice j, deci ecuațiile corespunzătoare pot fi integrate cu condițiile limită de mai sus.

3. *Reacția* HCl. Ca exemplu vom considera reacția, presupusă continuă, a HCl:

$$r=3, \quad (\omega)_1=e_2+e_3, \quad (\omega)_2=e_3+e_1, \quad (\omega)_3=e_3.$$

Ecuațiile devin:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_{1,(a)}(s,t)}{\partial s}= \\
&=-r_1(s)\,P_{1,(a)}(s,t)-p_1(s)\sum_{(a)_2+(a)_3=(a)}P_{2,(a)_2}(s,t)\,P_{3,(a)_3}(s,t), \\
&\frac{\partial P_{2,(a)}(s,t)}{\partial s}= \\
&=-r_2(s)\,P_{2,(a)}(s,t)-p_2(s)\sum_{(b)_3+(b)_1=(b)}P_{3,(b)_3}(s,t)\,P_{1,(b)_1}(s,t), \\
&\frac{\partial P_{3,(a)}(s,t)}{\partial s}=0, \quad \text{deoarece} \quad p_3=q_3=r_3=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

La acestea adăugăm cele trei ecuații, de asemenea neliniare, separate, pentru determinarea probabilităților de absorbție:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_{1,\omega}(s,t)}{\partial s}= \\
&=-r_1(s)\,P_{1,\omega}(s,t)-q_1(s)-p_1(s)\,P_{2,\omega}(s,t)\,P_{3,\omega}(s,t), \\
&\frac{\partial P_{2,\omega}(s,t)}{\partial s}= \\
&=-r_2(s)\,P_{2,\omega}(s,t)-q_2(s)-p_2(s)\,P_{1,\omega}(s,t)\,P_{3,\omega}(s,t), \\
&\frac{\partial P_{3,\omega}(s,t)}{\partial s}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ultima ecuație din (10) ne dă

$$P_{3,\omega}(s,t)=0. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, sistemul se reduce la

$$\frac{\partial P_1}{\partial r} = -r_1(s)\,P_1 - q_1(s); \quad \frac{\partial P_2}{\partial s} = -r_2(s)\,P_2 - q_2(s), \tag{12}$$

notînd $P_{1,\omega} = P_1(s)$, $P_{2,\omega} = P_2(s)$, cu condiţiile marginale $P_{1,\omega}(t) = 0$, $P_{2,\omega}(t) = 0$. Vom avea deci, ţinînd seama de condiţiile limită $P_{1,\omega}(t,t) = 0$, $P_{2,\omega}(t,t) = 0$:

$$P_{1,\omega}(s,t) = e^{\int_s^t r_1(u)\,du} \int_s^t q_1(v)\, e^{-\int_v^t r_1(u)\,du}\, dv;$$

$$P_{2,\omega}(s,t) = e^{\int_s^t r_2(u)\,du} \int_s^t q_2(v)\, e^{-\int_v^t r_2(u)\,du}\, dv.$$

Se verifică imediat că $P_{1,\omega}(s,t)$ ca şi $P_{2,\omega}(s,t)$ sînt crescătoare cu t. Dacă procesul este omogen, p_j, q_j, r_j sînt constante:

$$P_{1,\omega}(t-s) = -\frac{q_1}{r_1}(1 - e^{r_1(t-s)}),$$

$$P_{2,\omega}(t-s) = -\frac{q_2}{r_2}(1 - e^{r_2(t-s)}).$$

Reamintim că $r_1,\ r_2 \leq 0$; $q_1,\ q_2 \geq 0$. Valoarea asimptotică a probabilităţilor precedente este

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} P_{1,\omega}(t-s) &= -\frac{q_1}{r_1}, \\ \lim_{t\to\infty} P_{2,\omega}(t-s) &= -\frac{q_2}{r_2}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Pentru ca aceste limite să aibă sens probabilistic, este necesar şi suficient ca $q_1 < |r_1|$, $q_2 < |r_2|$. In acest caz, procesul continuă indefinit. Dacă $q_1 = |r_1|$, avem:

$$\lim_{t\to\infty} P_{1,\omega}(t-s) = 1,$$

deci *probabilitatea de absorbţie a particulelor de tip* 1 *este* 1.

In această regulă de comportare asimptotică intervine numai raportul între q şi $|r|$.

Se ştie dintr-o teoremă a lui Perron că rezultatul este acelaşi dacă $q_1(t) \underset{t\to\infty}{\to} q_1$, $r_1(t) \underset{t\to\infty}{\to} r_1$.

In ce privește ecuațiile (9), ultima dintre ele ne dă

$$P_{3,(a)}(s,t)=P_{3,(a)}(t,t). \tag{14}$$

Deci,

$$P_{3,3}(s,t)=1;\quad P_{3,(a)}(s,t)=0 \quad \text{pentru} \quad (a)\neq 3.$$

Cu aceste valori, primele două ecuații (9) devin:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_{1,(a)}(s,t)}{\partial s}&=-r_1(s)P_{1,(a)}(s,t)-p_1(s)P_{2,(a_1,a_2,a_3)}(s,t),\\ \frac{\partial P_{2,(a)}(s,t)}{\partial s}&=-r_2(s)P_{2,(a)}(s,t)-p_2(s)P_{1,(a_1,a_2,a_3-1)}(s,t),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dacă $a_3 \geq 1$.

Pentru cazul $a=(a_1, a_2, 0)$ ecuațiile devin:

$$\frac{\partial P_{1,a}(s,t)}{\partial s}=-r_1(s)P_{1,a}(s,t);\quad \frac{\partial P_{2,a}(s,t)}{\partial s}=-r_2(s)P_{2,a}(s,t).$$

Cu condițiile limită

$$P_{1,a}(t,t)=\begin{cases}0 & (a)\neq(1,0,0)\\ 1 & (a)=(1,0,0)\end{cases};\quad P_{2,(a)}(t,t)=\begin{cases}0 & (a)\neq(0,1,0)\\ 1 & (a)=(0,1,0)\end{cases}$$

găsim pentru acestea

$$\left.\begin{aligned}&P_{1,(a)}(s,t)=0 \text{ pentru } (a)\neq(1,0,0);\ P_{1,1}(s,t)=e^{-\int_s^t r_1(u)\,du}\\ &P_{2,(a)}(s,t)=0 \text{ pentru } (a)\neq(0,1,0);\ P_{2,2}(s,t)=e^{-\int_s^t r_2(u)\,du}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Cu ajutorul acestor valori se pot construi, din aproape în aproape, integralele ecuațiilor (15) pentru orice (a).

4. *Cele două funcții vectoriale generatoare și relațiile lor* In cazul procesului continuu, pe lîngă funcția vectorială generatoare

$$\left.\begin{aligned}\Phi_j(s,t;\,x)&=\sum P_{j,(a)}(s,t)x^{(a)}+P_{j,\omega}(s,t)x_{r+1}=\\ &=\sum_{a_1,\ldots,a_r}^{0,1,\ldots,\infty}P_{j,(a_1,\ldots,a_r)}(s,t)x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_r^{a_r}+P_{j,\omega}(s,t)x_{r+1},\\ &\qquad (j=1,\ldots,r)\\ \Phi_{r+1}&=x_{r+1},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

introducem şi funcţia asociată vitezelor de variaţie $p_{j,(a)}(t)$ din (1):

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j(t;\ x)=\sum_a p_{j,(a)}(t)\,x^a+p_{j,\omega}(t)\,x_{r+1} \quad (j=1,2,\ldots,r),\\ &\varphi_{r+1}(t;x)=0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Deoarece potrivit cu (1) $\sum\limits_{(a)\neq j} p_{j,(a)}(t)=|p_{j,j}(t)|$, iar $p_{j,(a)}>0$, pentru $(a)\neq j$, rezultă că seriile (18) ca şi (17) sînt absolut convergente pentru $|x_1|,\ |x_2|,\ldots,\ |x_r|\leq 1$.

Se vede imediat, de asemenea, din (1), că

$$\varphi_j(t;\ 1)=0. \tag{19}$$

Se verifică imediat că între vectorii Φ şi φ există următoarea relaţie

$$\Phi(t,\ t+\Delta;\ x)=x+\varphi(t;\ x)\,\Delta+\theta(\Delta), \tag{20}$$

cu ajutorul căreia se stabilesc *următoarele două sisteme diferenţiale:*

1°. Sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial s}\underset{s<t}{=}-\Phi_k(s;\ \Phi) \quad k=1,2,\ldots,r \tag{21}$$

cu condiţiile limită $\Phi_k(t,t;x)\underset{s=t}{=}x_k$.

2°. Ecuaţia unică

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\sum_{k=1,\ldots,r}\underset{t>s}{\varphi_k(t;x)}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}, \tag{22}$$

pentru care determinăm r soluţii:

$$\Phi_j(s,s;x)\underset{(t=s)}{=}\underset{j=1,2,\ldots,r}{x_j}.$$

Pentru a stabili aceste relaţii diferenţiale plecăm de la relaţia funcţională vectorială

$$\Phi(s,t;x)=\Phi(s,u;\Phi(u,t;x)) \quad (s\leq u\leq t), \tag{23}$$

care, dacă facem $u=s+\Delta$ şi ţinem seama de (20), devine

$$\Phi(s,t;x)=\Phi(s+\Delta,t;x)+\varphi(s,F(s+\Delta;t,x)\,\Delta)+\theta\Delta,$$

de unde sistemul (21).

Dacă în (23) înlocuim pe t cu $t+\Delta$ şi u cu t, obţinem mai întîi egalitatea

$$\Phi(s, t+\Delta, x)=\Phi(s, t; \Phi(t, t+\Delta; x))=\Phi(s, t; x+\varphi(t, x)\Delta+\theta(\Delta))$$

sau, încă, ţinînd seama că funcţiile Φ şi φ sînt analitice în domeniul $|x_k| \leq 1$,

$$\Phi(s, t+\Delta, x)=\Phi(s, t; x)+\Delta \sum_{k=1, \ldots, r} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k} \varphi_k(t, x)+\theta(\Delta).$$

Rezultă imediat ecuaţia (22).

Presupunînd că funcţiile $p_{j,(a)}(t)$ sînt date în condiţii pentru care sistemele precedente au soluţia unică, vectorul Φ, o dată determinată din sistemul (21) sau din ecuaţia (22), probabilităţile de trecere $P_{j,(a)}(s, t)$ sînt coeficienţii dezvoltării acestor funcţii în serii de puteri.

Vor reţine în particular atenţia coeficienţiilor lui x_{r+1}, precum şi comportarea diferitelor probabilităţi cînd $t \to \infty$.

Pentru diferite aplicaţii şi teoreme speciale, cititorul poate folosi lucrările de specialitate, în primul rînd expunerea sistematică a lui *B. Sevastianov*: Teoria proceselor stochastice ramificate (Uspehi matematiceskii nauk, nr. 6, 1951).

§ 11. Lanţuri multiple

1. *Relaţii funcţionale.* Un lanţ multiplu de ordin p este definit de egalităţile:

$$P_{E_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}}}(E^n_{j_n})=P_{E^{n-p}_{j_{n-p}} \cap E^{n-p+1}_{j_{n-p+1}} \cap \ldots \cap E^{n-1}_{j_{n-1}}}(E^n_{j_n}), \qquad (1)$$

unde probabilităţile condiţionate care figurează în ambii membri sînt definite în § 2.

Dacă desfacerile sînt aceleaşi pentru orice n, vom putea întrebuinţa, fără ambiguitate, notaţia probabilităţilor de trecere definită de egalităţile

$$P_{E^{n_1}_{l_1} \cap E^{n_2}_{l_2} \cap \ldots \cap E^{n_p}_{l_p}}(E^n_l)=P_{l_1 l_2 \ldots l_p, l}(n_1, n_2, \ldots, n_p; n) \quad n_1 \leq n_2 \leq \ldots n_p \leq n. \qquad (2)$$

Aceste probabilităţi de trecere, raportate în genere la evenimente, vor fi, în cele ce urmează, interpretate cîte o dată în relaţie cu valorile unui şir de variabile aleatorii $x^1, x^2, \ldots,$

$x^n, \ldots$, definite fiecare pentru sistemul de evenimente al desfacerii de același rang. Cum noi vom presupune că desfacerile sînt identice, are sens precis afirmația că, pentru evenimentul $E_j^n \equiv E_j$, funcția x^n ia valoarea a_j. Probabilitatea care figurează în (2) este probabilitatea condiționată de a avea valoarea a_l la momentul n, dacă la momentele anterioare și succesive n_1, $n_2, \ldots, n_p$ am avut valorile respective $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_p}$. Modul de exprimare referitor la valorile luate de variabilele respective ale șirului va fi întrebuințat în acest paragraf, fără însă a fi esențial legat de problemele pe care le examinăm.

Acest dublu aspect al lanțului: *ca succesiune de evenimente* — cînd va fi numit *proces stochastic* — și *ca succesiune de valori* — valorile unei funcții aleatorii — cînd reprezintă această *funcție aleatorie* — se va regăsi și pentru procesele continue în timp.

Valorile $P_{l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}}(n, n+1, \ldots, n+p-1, n+p)] = p_{l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}}(n)$ constituie *probabilitățile elementare* ale lanțului. Ele verifică condițiile generale:

$$p_{l_1, l_2, \ldots, l_{p+1}}(n) \geq 0 \qquad \sum_{l_{p+1}}^{1, 2, \ldots, m} p_{l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}}(n) = 1. \tag{3}$$

Pentru a găsi alte relații caracteristice lanțului, pe care le satisfac aceste probabilități, vom construi, mai întîi, sistemul de probabilități fundamentale diferite, precum urmează:

$$P_{l_0, l_1, \ldots, l_{p-1}, k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}}(r, r+1, \ldots, r+p-1;\ r+n,\ r+n+1, \ldots$$

$$\ldots, r+n+p-1) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}^{1, 2, \ldots, m} P_{l_0, l_1, \ldots, l_{p-1}, j_1}(r, r+1, \ldots, r+p-1;$$

$$r+p)\, P_{l_1, l_2, \ldots, l_{p-1}, j_1, j_2}(r+1, \ldots, r+p-1, r+p;\ r+p+1) \ldots$$

$$\ldots P_{j_{n-2} k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}}(r+n-1, r+n, \ldots, r+n+p-1). \tag{4}$$

Probabilitățile fundamentale pe care le putem scrie fără ambiguitate $P_{\bar{l}, \bar{k}}(\bar{r}; \bar{s})$, unde $\bar{r}$ și $\bar{s}$ reprezintă succesiunea de momente $r, r+1, \ldots, r+p-1$, respectiv $s, s+1, \ldots, s+p-1$ $(s \geq r+p-1)$, iar $\bar{l}$ și $\bar{k}$ sistemele de indici $l_0, l_1, \ldots, l_{p-1}$; $h_0, h_1, \ldots, h_{p-1}$, *verifică relația funcțională:*

$$P_{\bar{l}, \bar{k}}(\bar{r}, \bar{s}) = \sum_{\bar{h}} P_{\bar{l}, \bar{k}}(\bar{r}, \bar{u})\, P_{\bar{h}, \bar{k}}(\bar{u}, \bar{s}), \tag{5}$$

unde

$$r \leq u \leq s.$$

Demonstrarea teoremei reprezentată de (5) constă într-o simplă și imediată verificare:

Probabilitățile de trecere ale lanțului sînt legate între ele și cu probabilitățile fundamentale prin relațiile

$$P_{\bar{l},\,k}(\bar{r};\ r+n) = \sum_{\bar{h}} P_{\bar{l},\,\bar{h}}(\bar{r},\ \overline{r+u})\, P_{\bar{h},\,k}(\overline{r+u},\ r+n), \tag{6}$$

unde

$$0 \leq u \leq n.$$

In cazul lanțului simplu, probabilitățile fundamentale și probabilitățile $P_{h,\,k}(r,\ s)$ coincid. De aceea, relațiile funcționale (5) și relațiile (6) coincid. Pentru lanțurile multiple, numai probabilitățile fundamentale, considerate ca operatori, verifică relația de propagare (5). Aceste probabilități generează probabilitățile condiționate propriu-zise, prin intermediul relațiilor (6).

Fiind cunoscute probabilitățile elementare $P_{h_1,\,h_2,\ldots,\,h_{p+1}}(r, r+1, \ldots, r+p)$ pentru fiecare r, se pot construi atît probabilitățile fundamentale cît și cele de trecere. In particular,

$$P_{\bar{h},\,l}(\bar{r},\ t) = \sum_{\bar{k}} P_{\bar{h},\,\bar{k}}(\bar{r},\ \overline{t-p})\, P_{\bar{k},\,l}(\overline{t-p},\ t).$$

Dacă

$$P_{h_1,\,h_2,\ldots,\,h_{p-1}}(r,\ r+1,\ldots,r+p) = p_{h_1,\,h_2,\ldots,\,h_{p+1}},$$

independent de r, lanțul este omogen.

2. *Reducerea la un lanț simplu.* In reprezentarea sa prin *probabilitățile de bază* $P_{\bar{l},\,\bar{k}}(\bar{r},\ \bar{s})$, legate prin relațiile de propagare (5), lanțul poate fi considerat și ca un lanț simplu.

Sistemului de valori $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_{p-1})$ cu $l_0, l_1, \ldots, l_{p-1} = 1, \ldots, m$ îi facem să corespundă biunivoc și numerele șirului $1, 2, \ldots, m^p$, ceea ce reprezintă o numerotare a evenimentelor $E^r_{l_0} \cap E^{r+1}_{l_1} \cap \ldots \cap E^{r+p-1}_{l_{p-1}} = \mathcal{E}^r_l$. Dacă scriem

$$\Pi_{l,\,k}(r,\ s) = P_{\bar{l},\,\bar{k}}(\bar{r},\ \bar{s}),$$

deoarece

$$\Pi_{l,\,k}(r,\ s) = \sum_{h}^{1,\,2,\ldots,\,m^p} \Pi_{l,\,h}(r,\ u)\, \Pi_{h,\,k}(u,\ s),$$

oricare ar fi u cuprins între r și s, evenimentele $\mathcal{E}^r_l$ formează un *lanț Markov simplu.*

Acest lanț reprezintă, într-o bună măsură, mai cu seamă în ce privește comportarea asimptotică, lanțul multiplu de ordinul p considerat.

In teza sa din 1934, *Gh. Mihoc* a asociat unui lanț multiplu de ordinul p un lanț simplu, referindu-se nu la evenimente, ci la variabilele aleatorii $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$, care corespund desfacerilor succesive. Vom presupune că $x^{(n)}$ poate lua valorile $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Dacă $f(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ este o funcție determinată de variabilele reale $z_1, z_2, \ldots, z_m$, relația

$$y^{(l)} = f(x^{(lm+1)}, x^{(lm+2)}, \ldots, x^{(l+1)m})$$

ne dă un lanț simplu de variabile aleatorii $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(l)}, \ldots$

Alegerea funcției f este indicată de probleme. Pentru a afla comportarea sumei variabilelor $x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(n)}$ cînd $n\to\infty$, este suficient să luăm $f\equiv z_1+z_2+\ldots+z_m$ și atunci, avînd

$$y^{(1)}+y^{(2)}+\ldots+y^{(l)} = x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(pl)},$$

legea limită redusă a sumei $x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(ml)}$ a variabilelor din lanțul multiplu de ordinul p este aceeași cu legea redusă a sumei variabilelor unui lanț Markov simplu.

§ 12. Reversibilitatea și stabilitatea proceselor în lanț multiplu. Teorema lui Mihoc

1. Reversibilitatea urmînd procedeul întrebuințat în cazul lanțului simplu, vom demonstra mai întîi.

Teorema lui Mihoc. Lanțurile Markov multiple de ordinul k sînt reversibile cu păstrarea ordinului.

Vom face demonstrația pentru $k=2$, numai pentru a simplifica scrierea.

Fie $E_{l_n}^n$ $(n=1, 2, \ldots; l_n=1, 2, \ldots, m)$ o succesiune de evenimente în lanț Markov dublu.

Aplicînd formula (4), § 2, și ținînd seama că evenimentele formează un lanț Markov dublu, obținem:

$$P(E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+3}}^{n+3}) =$$

$$= P(E_{l_n}^n)\, P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+3}}^{n+3}) \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și, în același timp,

$$P(E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+3}}^{n+3}) =$$

$$= P(E_{l_{n+3}}^{n+3})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n). \quad (2)$$

Deci

$$P(E_{l_{n+3}}^{n+3})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n) =$$

$$= P(E_{l_n}^n)\, P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+3}}^{n+3}). \quad (3)$$

In același mod găsim:

$$P(E_{l_{n+3}}^{n+3})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+1}}^{n+1}) =$$

$$= P(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+3}}^{n+3}). \quad (4)$$

Divizînd membru cu membru (3) și (4), obținem:

$$P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n) =$$

$$= P(E_{l_n}^n)\, P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) \,/\, P(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}). \quad (5)$$

Prin urmare, membrul întîi nu depinde de $E_{l_{n+3}}^{n+3}$ și avem:

$$P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n) = P_{E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n).$$

Procesul invers este un lanț Markov de ordinul al doilea. Mai trebuie să arătăm că lanțul nu este degenerat, că ordinul este efectiv doi. Este suficient, pentru aceasta, să verificăm că membrul al doilea al relației (5) depinde efectiv de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$. Presupunem că raportul din membrul al doilea din (5) nu depinde de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$. Dacă punem

$$P(E_{l_n}^n)\, P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) = \lambda P(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) \quad (6)$$

și λ nu depinde de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$, însumăm în ambii membri din relația (6) în raport cu l_{n+2}. Vom găsi:

$$P(E_{l_n}^n)\, P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1}) = \lambda P(E_{l_{n+1}}^{n+1}).$$

Introducînd în (6), rezultă:

$$P_{E^n_{l_n} \cap E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}) = P_{E^{n+1}_{l_{n+1}}}(E^{n+2}_{l_{n+2}}),$$

deci lanțul direct este el însuși de ordinul întîi, în contradicție cu ipoteza.

2. *Stabilitatea și comportarea asimptotică a lanțurilor multiple* se studiază în mod complet pe lanțul simplu la care ele se reduc cu ajutorul probabilităților fundamentale.

Să presupunem, de exemplu, că lanțul probabilităților fundamentale este ergodic:

$$\lim_{s\to\infty} P_{h_1h_2,\ k_1k_2}(r,\ r+1;\ s,\ s+1) = P_{k_1k_2}.$$

Dacă plecăm de la relația care definește probabilitățile condiționate

$$P_{h_1h_2,\ l}(r,\ r+1;\ t) = \sum_{k_1,\ k_2} P_{h_1h_2,\ k_1k_2}(r, r+1; t-2, t-1)\, P_{k_1k_2,\ l}(t-2, t-1, t)$$

și dacă presupunem că probabilitățile elementare $P_{k_1k_2;\ l}(t-2,\ t-1,\ t) = p_{k_1k_2,\ l}$ sînt independente de t, rezultă că

$$\lim P_{h_1h_2,\ l}(r,\ r+1,\ t) = \sum_{k_1k_2} P_{k_1k_2}\, p_{k_1k_2,\ l} = P_l.$$

Deci, lanțul propriu-zis este ergodic.

Proprietățile de stabilitate se reduc toate la proprietățile de stabilitate ale lanțurilor simple.

BIBLIOGRAFIE

Pentru primele 7 paragrafe a se vedea bibliografia de la Cap. XIV. Bibliografia care urmează se referă în special la paragrafele 8—12.

O. Onicescu et *Gh Mihoc*: Chaînes et mouvements discontinus, Buletinul matematic al Societății Romîne de Științe, 1947.

А. Колмогоров И. Димитриев: Ветвящиеся случайные процессы. ДАН 56, 1947.

А. Колмогоров и *Б. Севастьянов*: Вычисление финальных вероятностей для ветвящихся случайных процессов, ДАН 56, 1947.

В. Романовский и *Б. Севастьянов*: О теории случайных ветвящихся процессов, ДАН 59, 1948.

N. Arley: On the Theory of Stochastic Processes and their applications to the theory of Cosmic radiation, New-York, 1943.

E. Bellmane and *F. Harris*: On the Theory of Stochastic Processes, Nat. Acad, Sc. 34, 1948.

I. Stefensen: Deux problèmes du calcul des probabilités, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, III, 1933.

Scanned with OKEN Scanner

Gh. Mihoc: Asupra proprietăților variabilelor statistice interdependente, Bul. Ac. R.P.R., 1953.
P. Lévy: Chaînes doubles de Markov et functions aléatoires de deux variables, Comptes Rendus, Ac. Sc., t. 226, 1948.
P. Lévy: Exemples de processus doubles de Markov, Comptes Rendus, Ac. Sc., t. 226, 1948.
R. Teodorescu: Asupra relațiilor caracteristice ale lanturilor Markov continue de multiplicitate *p*, Bul. Științific al Ac. R.P.R., Nr. 3, 1955.
R. Teodorescu: Procese stochastice continue de multiplicitate *p*, Bul. Științific al Ac. R.P.R., Nr. 3, 1955.

CAPITOLUL III

LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE

§ 1. Lanțuri oarecare. Spațiul lanțurilor. Evenimente și probabilități elementare

1. *Procese în genere.* Un proces stochastic discontinuu al unui sistem complet de evenimente în număr finit $E_1, E_2, \ldots, E_m$ într-un cîmp de evenimente $\{E, K\}$ este constituit din mulțimea $\mathfrak{E}$ de șiruri

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots, \tag{1}$$

unde A_n, pentru orice n, este unul oarecare dintre evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sau o reuniune de astfel de evenimente.

Vom numi evenimente elementare ale procesului șirurile de forma

$$E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, E, \ldots,$$

pe care le vom nota și în forma finită echivalentă

$$\delta_n = E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}.$$

Problema procesului stochastic constă în determinarea probabilității evenimentelor elementare, deci în determinarea probabilității drumurilor finite de forma δ_n.

In cazul general, aceste probabilități $p_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$ sînt supuse numai următoarelor condiții

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \geq 0; \quad \sum_{j_n=1, 2, \ldots, m} p_{j_1, j_2, \ldots, j_m} = p_{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}}, \tag{2}$$

pentru orice n și $j_1, j_2, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots, m$.

In particular, printre aceste probabilități avem și valorile p_{j_1}, care reprezintă probabilitățile evenimentelor $E_{j_1} (j_1 = 1, 2, \ldots, m)$.

Scanned with OKEN Scanner

Condiţiile (2) nu sînt contradictorii între ele, cum se verifică pe numeroase exemple. Astfel, de exemplu, condiţiile (1) sînt verificate dacă luăm

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_m} = p_{j_1} \cdot p_{j_2} \cdots p_{j_m},$$

unde p_j sînt probabilităţile date ale evenimentelor E_j pe cîmpul $\{E, K, P_s\}$.

In acest caz, procesul este format dintr-o succesiune de evenimente independente.

Mai general, se pot construi probabilităţile $p_{j_1, j_2, \ldots j_n}$, dacă dăm, în afară de sistemul p_j, un sistem de m^2 valori p_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$, cu proprietăţile

$$p_{jk} \geq 0, \quad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} p_{jk} = 1 \tag{3}$$

şi luăm, prin definiţie,

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_m} = p_{j_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n}.$$

Aceste numere au proprietăţile (2) şi pot fi considerate ca probabilităţile elementare ale unui proces. Acest proces este de tip Markov, omogen, simplu.

Dacă dăm cîte un sistem (2) pentru fiecare n, probabilităţile elementare sînt de forma

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = p_{j_1} \cdot p^{(1)}_{j_1 j_2} \cdot p^{(2)}_{j_2 j_3} \cdots p^{(n-1)}_{j_{n-1} j_n} \tag{4}$$

şi corespund unui proces Markov simplu variabil.

Dacă dăm un sistem de probabilităţi iniţiale p_j, p_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ şi un sistem de probabilităţi de trecere $p_{jkl}(s)$ $(j, k, l = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots)$, cu proprietăţile

$$p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1; \quad p_{jk} \geq 0, \sum_k p_{jk} = 1, \tag{5}$$

$$p_{jkl}(s) \geq 0; \quad \sum_l p_{jkl}(s) = 1$$

probabilităţile elementare vor fi de forma

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_l} = p_{j_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdot p^{(1)}_{j_1 j_2 j_3}, \ldots, p^{(n-2)}_{j_{n-2} j_{n-1} j_n}$$

şi corespund unui proces Markov variabil, multiplu de ordinul al doilea.

2. *Relația funcțională a lanțurilor cu legături complete.* Să considerăm un spațiu S de șiruri de evenimente, definit prin probabilitățile elementare $p_{j_1, j_2, \ldots, j_l}$ $(j_1, j_2, \ldots, j_l = 1, 2, \ldots, m;$ $l = 1, 2, \ldots)$, satisfăcînd condițiile (2).

Să notăm cu s un șir de evenimente succesive E_{j_1}, $E_{j_2}, \ldots, E_{j_l}$; s este un eveniment al spațiului S al șirurilor (1).

Vom nota cu $s+i$ drumul format de evenimentele succesive $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_l}, E_i, \ldots$ și cu $P_i(s)$ probabilitatea evenimentului $s+i$ *condiționată* de evenimentul s.

Vom pune $P_i^{(1)}(s) = P_i(s)$ și vom determina probabilitățile iterate $P_i^{(n)}(s)$ prin *relația funcțională*

$$P_j^{(n+1)}(s) = \sum_{i=1, 2, \ldots, m} P_i(s)\ P_j^{(n)}(s+i), \tag{6}$$

interpretînd, prin aceasta, $P_i^{(n)}(s)$ drept probabilitatea ca, după ce a fost parcurs drumul s, prin n treceri succesive, să ajungem la E_i, deci o probabilitate condiționată a evenimentului

$$\underbrace{E, E, \ldots, E}_{l+n}, E_i, E, E, \ldots$$

Un exemplu va lămuri aceste considerații.

Fie S spațiul șirurilor unui lanț Markov omogen. Așa cum am arătat,

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_l} = p_{j_1}\ p_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_{l-1} j_l}.$$

In acest caz, dacă $c \equiv E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_l}$, avem:

$$P_i(c) = p_{j_l i} = P_{j_l i}^{(1)},$$

$$P_j^{(n)}(c+i) = P_{ij}^{(n)}; \quad P_j^{(n)}(c) = P_{j_l j}^{(n)}.$$

Relația (5) devine

$$P_{j_l j}^{(n+1)} = \sum_{i=1, 2, \ldots, m} P_{j_l i}^{(1)}\ P_{ij}^{(n)},$$

caracteristică lanțului Markov.

3. *Asupra legăturii dintre spațiul lanțurilor de evenimente* (1) *și spațiul de bază* E. Fiind dat un cîmp de probabilitate $\{E, K, P\}$,

Scanned with OKEN Scanner

probabilităţile elementare ale spaţiului (1) sînt date de formulele

$$p_{j_1 j_2 \dots j_n} = P(E_{j_1}) P_{E_{j_1}}(E_{j_2}) P_{E_{j_1}, E_{j_2}}(E_{j_3}) \dots P_{E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}}(E_{j_n}), \quad (7)$$

unde am făcut să intervină diferitele probabilităţi condiţionate.

Deoarece numărul evenimentelor este m, probabilităţile p_{ji} distincte care intervin în aceste produse sînt în număr limitat.

Experienţa pune, de obicei, problema inversă. *Dîndu-se probabilităţile $p_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ ale evenimentelor elementare ale spaţiului şirurilor, sau o parte suficientă dintre ele, să se găsească un cîmp de evenimente $\{E, K, P\}$ pentru care să fie satisfăcute relaţiile* (7).

Probabilităţile evenimentelor E_j sînt, evident, date o dată cu probabilităţile elementare. Egalităţile

$$p_{ij} = p_i \pi_{ij},$$

unde π_{ij} sînt probabilităţile condiţionate, vor da aceste probabilităţi. Acelaşi lucru pentru probabilităţile π_{ijk}, date de egalităţile

$$p_{ijk} = p_i \pi_{ij} \pi_{ijk}.$$

Vom putea deci, în particular, recunoaşte dacă lanţul este de tip Markov şi găsi probabilităţile de trecere.

Nu adîncim această analiză, deoarece aici am urmărit numai să-i relevăm însemnătatea, dat fiind că $\{E, K, P\}$ este, în general, un cîmp teoretic, pe cînd cel al experienţei imediate este cîmpul şirurilor de evenimente.

4. *Lanţuri cu legături complete.* Cînd considerăm un lanţ Markov variabil, pentru care, deci, probabilităţile $p_{jk}^{(n)}$ depind de momentul n, această dependenţă poate avea un caracter exterior, dat a priori: $p_{jk}^{(n)} = p_{jk}(n)$ poate avea şi un caracter intrinsec legat de lanţ. Faptul acesta se produce dacă legăm probabilităţile evenimentului E_{j_n} din şirul $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}, \dots$ nu numai de evenimentul anterior, dar şi de probabilitatea lui. In acest mod, legătura de lanţ simplu este cimentată în modul cel mai complet, de unde denumirea de lanţ cu legături complete dat procesului respectiv. Vom avea, aşadar, în acest caz:

$$p_{j_h j_{h+1}} = \varphi_{j_h j_{h+1}}(p_{j_{h1}}, p_{j_{h2}}, \dots, p_{j_{hm}})$$

$$(j_h, j_{h+1} = 1, 2, \dots m), \quad (8)$$

unde $\varphi_{jk}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sînt funcţii de m argumente pentru

$$0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_m \leq 1,$$

avînd proprietăţile

$$0 \leq \varphi_{jk}(x) \leq 1, \quad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} \varphi_{jk}(x) = 1. \tag{9}$$

Şi în acest caz vom putea defini probabilităţile elementare prin egalităţile (4). Aceste lanţuri condensează influenţa stărilor anterioare mai complet de cît lanţurile Markov, însă folosind tot numai caracteristicile stării imediat anterioare.

§ 2. Modele de lanţuri cu legături complete

1. *Un lanţ aleator de urne.* Să considerăm o urnă U_1 conţinînd m_1 bile de culoarea 1, m_2 bile de culoarea $2, \ldots, m_k$ bile de culoarea k. Plecînd de la U_1 ca urnă iniţială, vom construi un şir infinit de urne

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots,$$

după următoarea regulă aleatoare.

Numerele $m_j^{(n+1)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ corespunzătoare urnei U_{n+1} sînt funcţii de numerele $m_j^{(n)}$ corespunzătoare urnei U_n, determinate pentru fiecare dintre cele l culori ale urnei:

$$m_j^{(n+1)} = f_j(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)}). \tag{1}$$

Să presupunem că toate aceste funcţii sînt omogene şi de acelaşi grad. Probabilitatea extragerii unei bile de culoarea j din urna U_{n+1} este

$$p_j^{(n+1)} = \frac{m_j^{(n+1)}}{\sum_{h=1, 2, \ldots, k} m_h^{(n+1)}} = \frac{f_{lj}(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)})}{\sum_{h=1, 2, \ldots, k} f_{lh}(m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \ldots, m_k^{(n)})}.$$

Ţinînd seamă de omogenitate, putem înlocui în expresia din membrul al doilea fiecare $m_i^{(n)}$ prin $\lambda m_i^{(n)}$, oricare ar fi $\lambda \neq 0$. Dacă punem în particular $\lambda = \sum_{i=1, 2, \ldots, k} m_i^{(n)}$, găsim:

$$p_j^{(n+1)} = \frac{f_{lj}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})}{\sum_{h=1, 2, \ldots, k} f_{lh}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})} = \varphi_{lj}(p_1^n, p_2^n, \ldots, p_k^n), \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

egalitate care arată că lanțul construit mai sus este: *simplu* și cu *legături complete.*

Generalitatea funcțiilor $f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ne arată că modelul de mai sus are el însuși un mare grad de generalitate.

2. *Lanțuri cu legături complete de ordinul al doilea.* O schemă simplă a lui A. Markov ne arată că, cel puțin în anumite împrejurări, dacă funcțiile $f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nu sînt omogene, se obține un lanț cu legături complete de ordinul al doilea.

Fie U_1 urna inițială conținînd o bilă albă și una neagră. Se efectuează o extracție din urnă și se înlocuiește bila obținută prin altele două de aceeași culoare. Obținem astfel urna U_2. Continuăm după aceeași regulă. Obținem o succesiune aleatorie de urne de tipul (1), fără omogenitatea funcțiilor f_{ij}.

Să notăm prin m_1 și m_2 respectiv numărul de bile albe și de bile negre, după a n-a extracție.

Dacă m_1' și m_2' reprezintă numărul bilelor albe și negre după extracția care urmează, vom avea:

$$m_1' = m_1 + 1, \quad m_2' = m_2,$$

dacă extracția precedentă nu a dat o bilă albă, și

$$m_1' = m_1, \quad m_2' = m_2 + 1,$$

în cazul contrariu.

Să presupunem că extracțiile de ordinul n și $(n+1)$ au dat fiecare cîte o bilă albă. Dacă notăm cu α și β numărul de bile albe și negre care existau în urnă înainte de a n-a extracție, vom avea:

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad p' = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}, \quad p'' = \frac{\alpha+2}{\alpha+\beta+2},$$

unde p, p', p'' sînt probabilitățile de a extrage o bilă albă respectiv în a n-a, a $(n+1)$-a și a $(n+2)$-a extracție. Dacă eliminăm pe α și β din aceste trei relații, rezultă:

$$p'' = \frac{2p' - pp' - p}{1 + p' - 2p}; \tag{I}$$

dacă extracțiile de rang n și $n+1$ au dat respectiv o bilă albă și una neagră, vom avea:

$$p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad p' = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1},$$

care prin eliminarea lui α și β dă

$$p''=\frac{p'-pp'}{1+p'-2p}; \qquad \text{(II)}$$

dacă extracțiile de rang n și $n+1$ au dat respectiv o bilă neagră și una albă, vom avea:

$$p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad p'=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1},\quad p''=\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$$

$$p''=\frac{pp'+p-p'}{2p-p'}; \qquad \text{(III)}$$

și, în sfîrșit, dacă cele două extracții au dat fiecare cîte o bilă neagră, va rezulta:

$$p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad p'=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1},\quad p''=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+2};$$

$$p''=\frac{pp'}{2p-p'}. \qquad \text{(IV)}$$

Relațiile (I), (II), (III), (IV) caracterizează *un lanț cu legături complete multiplu de ordinul al doilea.*

3. *Reprezentarea unui lanț Markov multiplu ca lanț simplu cu legături complete.* Lanțurile Markov simple pot fi considerate ca lanțuri cu legături complete și anume cînd funcțiile $f_{ij}(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)})$ se reduc la constante.

Un lanț multiplu de ordinul r relativ la evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_k$ este caracterizat prin probabilitățile fundamentale de trecere $P_{l_r, l_{r-1}, \ldots, l_1, l}(n-r, n-r+1, \ldots, n-1, n)$. Dacă notăm, prescurtat,

$$P_{l_r, l_{r-1}, \ldots, l_1, l}(n-r, n-r+1, \ldots, n-1, n)=\Pi_{\gamma}^{(n)},$$

și dacă $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt probabilitățile absolute ale evenimentelor $E_1, E_2, \ldots, E_k$, atunci relația funcțională corespunzătoare lanțului Markov multiplu poate fi interpretată ca o relație a unui lanț simplu cu legături complete.

§ 3. Lanțuri cu legături complete ale schemelor de contagiune

1. *Lanț variabil. Schema lui Polya.* Dacă funcțiile f_{ij} depind și direct de n, lanțul se numește variabil.

In această categorie se pot clasa schemele de contagiune ale lui Polya.

Pentru realizarea acestei scheme, să considerăm o urnă cu α bile albe și β bile negre. După fiecare extracție se înlocuiește bila scoasă din urnă prin $1+\delta$ bile de aceeași culoare.

Dacă procedăm astfel și dacă primele n extracții au dat k bile albe, urna va conține $\alpha+k\delta$ bile albe și $\beta+(n-k)\delta$ bile negre.

Probabilitatea de a obține o bilă albă va fi atunci

$$p_n=\frac{\alpha+k\delta}{\nu+n\delta} \qquad (\alpha+\beta=\gamma)$$

sau

$$p_n=\frac{p+k\gamma}{1+n\gamma},$$

dacă notăm:

$$p=\frac{a}{\nu}, \quad \gamma=\frac{\delta}{\nu}.$$

Dacă extracția de rang n a dat o bilă albă, probabilitatea ca în extracția de rang $n+1$ să obținem o bilă albă va fi:

$$P'_{n+1}=\frac{a+(k+1)\,\delta}{\nu+(n+1)\,\delta}=\frac{p+(k+1)\,\gamma}{1+(n+1)\,\gamma}.$$

Dacă bila extrasă a fost neagră, probabilitatea de a obține în extracția de rang $n+1$ o bilă albă va fi:

$$P''_{n+1}=\frac{a+k\delta}{\nu+(n+1)\,\delta}=\frac{p+k\gamma}{1+(n+1)\,\gamma}.$$

Dacă eliminăm pe k, obținem:

$$p'_{n+1}=f_{11}^{(n)}(p_n)=\frac{\gamma}{1+(n+1)\,\gamma}+\frac{1+n\gamma}{1+(n+1)\,\gamma}\,p_n,$$

$$p''_{n+1}=f_{21}^{(n)}(p_n)=\frac{1+n\gamma}{1+(n+1)\,\gamma}\,p_n.$$

Lanțul cu legături complete astfel definit este variabil și de ordinul întîi. Să observăm că, dacă împingem calculul pînă la rangul $n+2$, putem elimina pe n între relațiile obținute și vom avea un lanț cu legături complete constant, de ordinul al doilea.

2. *Un alt model de lanț variabil.* Modelul obținut la § 2,1, după o regulă de constituire de urne a lui Markov, reprezintă

de asemenea un lanţ variabil şi anume un caz particular al celui precedent ($\delta = 1$).

In adevăr, în acest caz avem:

$$p = \frac{\alpha}{n+1}, \quad p' = \frac{\alpha+1}{n+2},$$

dacă în extracţia de rang n am obţinut o bilă albă, şi

$$p = \frac{\alpha}{n+1}, \quad p' = \frac{\alpha}{n+2},$$

dacă în extracţia de rang n a ieşit o bilă neagră. Eliminînd pe α, obţinem:

$$p' = f_{11}^{(n)}(p) = \frac{(n+1)\,p+1}{n+2},$$

$$p'' = f_{21}^{(n)}(p) = \frac{(n+1)\,p}{n+2},$$

relaţii care caracterizează un lanţ de ordinul întîi, variabil.

§ 4. Proprietăţile ergodice ale lanţurilor cu legături complete

1. *Lanţuri ergodice.* Să considerăm un lanţ cu legături complete de ordinul întîi la evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_m, E_{m+1}$.

Să presupunem că probabilităţile de trecere se exprimă cu ajutorul funcţiilor

$$\varphi_{ik}(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

unde φ_{ik} verifică condiţiile

$$\varphi_{ik} \geq 0 \quad \text{şi} \quad \sum_{1}^{m+1}{}_{k} \varphi_{ik} = 1, \tag{1}$$

iar valorile p_i verifică condiţiile

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad \sum_{i=1}^{m} p_i \leq 1. \tag{2}$$

Să notăm prin $p_1, p_2, \ldots, p_m$ probabilităţile iniţiale ale stărilor $E_1, E_2, \ldots, E_m$ şi fie $P_s^{(n)}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ probabilitatea evenimentului E_s în experienţa de rangul n, oricare ar fi rezultatele experienţelor precedente.

Scanned with OKEN Scanner

Vom numi *ergodice* lanțurile pentru care

$$\lim_{n\to\infty} P_s^{(n)}(p_1,\ p_2,\ldots,p_m)=P_s. \qquad (3)$$

$$(s=1,\ 2,\ldots,m)$$

2. *Ecuația funcțională a probabilității totale.* Se vede imediat că

$$P_s^{(2)}(p_1,\ p_2,\ldots,p_m)=\sum_1^{m+1}{}_k\, p_k\varphi_{ks}(p_1,\ p_2,\ldots,p_m)$$

sau cu o notație mai concisă

$$P_s^{(2)}(p)=\sum_1^{m+1}{}_k\, p_k\varphi_{ks}(p).$$

Dacă punem, în general,

$$\varphi_{js}^2(p_k^2)=\varphi_{js}(\varphi_{k1}(p),\ \varphi_{k2}(p),\ldots,\varphi_{km}(p)),$$

vom avea:

$$P_s^{(n)}(p)=\sum p_k\varphi_{kj}(p)\,\varphi_{jl}(p^{(1)})\ldots\varphi_{rs}(p^{(n-1)}). \qquad (4)$$

Egalitatea precedentă ne dă imediat relația funcțională căutată:

$$P_s^{(n)}(p)=\sum_1^{m+1}{}_k\, p_k P_s^{(n-1)}[\varphi_{k1}(p),\varphi_{k2}(p),\ldots,\varphi_{km}(p)]. \qquad (5)$$

3. *Condiții suficiente pentru ergodicitate.* Relațiile funcționale (5) reprezintă o operație care conduce de la $P_s^{(n-1)}$ la $P_s^{(n)}$. Operatorul respectiv nu este, în general, complet continuu. Studiul proprietăților sale va fi efectuat mai întîi direct, așa cum facem în acest paragraf, care trebuie considerat și ca o teorie expusă pe un caz particular al unor operatori nu complet continui.

Vom arăta aici că pentru ergodicitate sînt *suficiente* următoarele trei condiții:

I. Funcțiile $\varphi_{ik}(p)$, definite în domeniul închis:

$$(D) \qquad 0\leq p_i\leq 1 \qquad (i=1,\ 2,\ldots,m),$$

sînt continue în acest domeniu și admit derivate de ordinul întîi continue; ele verifică în plus condițiile

$$0<\varphi_{ik}(p_1,\ p_2,\ldots,p_m)<1. \qquad (i,k=1,\ 2,\ldots,m) \qquad (\alpha)$$

II. Cel puţin una dintre transformările T_i

$$p'_k = \varphi_{ik}(p_1, p_2, \ldots, p_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (\beta)$$

admite un punct de atracţie şi unul singur în interiorul domeniului (D).

III. Derivatele funcţiilor $\varphi_{ik}(p)$ verifică inegalităţile

$$\sum_1^m{}_j \left|\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial p_h}\right| < 1. \qquad (\gamma)$$

4. *Egala continuitate a funcţiilor* $P_s^{(n)}(p)$. Cu aceste condiţii se poate demonstra egala continuitate a mulţimii funcţiilor $P_s^{(n)}$.

Relaţia (5) dă prin derivare

$$\frac{\partial P_s^{(n)}}{\partial p_k} = P_s^{(n-1)}[\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{kn}] - P_s^{(n-1)}[\varphi_{m+1,1}, \ldots, \varphi_{m+1,m}] +$$

$$+ \sum_1^{m+1}{}_i P_i \left[\frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial \varphi_{i1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} + \ldots + \frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial \varphi_{im}} \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial p_k}\right],$$

de unde

$$\left|\frac{\partial P_s^{(n)}}{\partial p_k}\right| \leq |P_s^{(n-1)}(\varphi_k) - P_s^{(n-1)}(\varphi_{m+1})| +$$

$$+ \sum_1^m{}_i p_i \left[\left|\frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial \varphi_{i1}}\right| \left|\frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial p_k}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial P_s}{\partial \varphi_{im}}\right| \left|\frac{\partial \varphi_{im}}{\partial p_k}\right|\right]. \qquad (6)$$

In virtutea condiţiilor (γ), avem:

$$\sum_1^m{}_j \left|\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial p_k}\right| < L < 1.$$

Dacă punem $\lambda = \frac{1}{1-L}$, aceleaşi inegalităţi dau, cu atît mai mult,

$$\left|\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial p_k}\right| < 1 < \lambda. \qquad (7)$$

Pe de altă parte, dacă admitem că pînă la $n-1$ avem:

$$\left|\frac{\partial P_s^{(n-1)}}{\partial p_k}\right| \leq \lambda,$$

Scanned with OKEN Scanner

inegalitățile (7) arată că

$$\left|\frac{\partial P_s^{(n)}}{\partial p_k}\right| \leq 1+\lambda L=\lambda. \tag{8}$$

Această inegalitate va fi adevărată deci pentru orice n, dacă este adevărată pentru $n=1$. Dar

$$P_s^{(1)}(p)=p_s,$$

ceea ce arată că (8) este adevărată în general.

Egala continuitate a sistemului $P_s^{(n)}$ rezultă din inegalitățile precedente.

In adevăr, putem scrie

$$|P_s^{(n)}(z_1, z_2, \ldots, z_m)-P_s^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leq$$

$$\leq \sum |z_i-y_i| \left|\frac{\partial P_s^{(n)}(\xi)}{\partial \xi_i}\right| \leq \lambda \sum_i |z_i-y_i|,$$

punctul $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ fiind cuprins în intervalul (z), (y).

Pentru $\varepsilon>0$ dat, să alegem $\delta=\frac{\varepsilon}{m\lambda}$. Atunci

$$|z_i-y_i| \leq \delta$$

implică

$$|P_s^{(n)}(z)-P_s^{(n)}(y)| \leq \varepsilon,$$

ori care ar fi n și s, inegalitate care arată că mulțimea funcțiilor $P_s^{(n)}$ este egal continuă în domeniul (D).

5. *Existența funcțiilor limită ale șirului* $P_s^{(n)}$ Mulțimea funcțiilor $P_s^{(n)}$ egal continue este *compactă*. Se poate extrage deci un subșir care converge uniform către o funcție continuă $P_s^{(h)}$.

Să considerăm expresiile:

$$M_s^{(n)} = \limsup P_s^{(n)},$$

$$m_s^{(n)} = \liminf P_s^{(n)},$$

bine determinate în (D), pentru funcția continuă $P_s^{(n)}=P_s^{(n)}(p)$.

Inegalitățile de mai sus dau imediat

$$M_s^{(n-1)} \geq M_s^{(n)},$$

$$m_s^{(n-1)} \leq m_s^{(n)}.$$

Rezultă că şirurile mărginite $M_s^{(n)}$ şi $m_s^{(n)}$ admit respectiv cîte o limită, pe care s-o notăm prin M_s şi m_s.

Deoarece avem

$$M_s^{(n)} \leq M_s^{(1)} < 1,$$
$$m_s^{(n)} \geq m_s^{(1)} > 0,$$
$$M_s^{(n)} > m_s^{(n)},$$

rezultă că

$$M_s < 1, \quad m_s > 0,$$
$$\delta_s = M_s - m_s \geq 0.$$

Se vede, pe de altă parte, că în aceste condiţii M_s şi m_s vor fi respectiv limita superioară şi inferioară a funcţiei limită $P_s^{(h)}$ şi a oricărei alte funcţii limită a şirului $P_s^{(n)}$.

Cu ajutorul relaţiei de recurenţă (5) şi al şirului

$$P_s^{(h_1)}, \quad P_s^{(h_2)}, \ldots, P_s^{(h_n)}, \ldots$$

se poate construi un alt şir, care admite de asemenea o limită. In adevăr, dacă utilizăm relaţia

$$P_s^{(h+1)}(p) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i P_s^{(h)} [\varphi_{i1}(p), \varphi_{i2}(p), \ldots, \varphi_{im}(p)],$$

vom avea:

$$P_s^{(h+1)}(p) - P_s^{(h_n+1)}(p) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i \{ P_s^{(h)}(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{im}) -$$
$$- P_s^{(h_n)}(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{im}) \}.$$

Dacă $\varepsilon > 0$ este dat, putem determina un număr N astfel ca

$$| P_s^{(h)} - P_s^{(h_n)} | < \varepsilon$$

pentru orice $n > N$.

Rezultă deci că

$$| P_s^{(h+1)} - P_s^{(h_n+1)} | < \varepsilon,$$

ceea ce dovedeşte că şirul $P_s^{(h_n+1)}$ tinde către $P_s^{(h+1)}$.

In acelaşi mod, prin repetarea procedeului, vom construi un şir de funcţii limită $P_s^{(h+c)}$ $(c = 0, 1, 2, \ldots)$ care sînt continue

în (D) și admit toate aceeași limită superioară M_s și aceeași limită inferioară m_s.

6. *Unicitatea funcției limită.* Funcția limită $P_s^{(h+r)}$ este dată de relația

$$P_s^{(h+r)} = \sum_1^{m+1} {}_{ij\ldots l} x_i \varphi_{ij} \varphi_{ijk} \ldots \varphi_{ijk\ldots l} P_s^{(h)} (\varphi_{ijk\ldots l_1}, \varphi_{ijk\ldots l_2}, \ldots, \varphi_{ijk\ldots l_m}), \quad (9)$$

unde am notat

$$\varphi_{ijk} = \varphi_{ij}(\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{km}).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{ijk\ldots gl} = \varphi_{ijk\ldots g}(\varphi_{l1}, \varphi_{l2}, \ldots, \varphi_{lm}).$$

Pe de altă parte, în (9) avem:

$$\sum_{ij\ldots kl} x_i \varphi_{ij} \ldots \varphi_{ijk\ldots l} = 1.$$

Inegalitățile (α) permit determinarea unui număr μ având proprietatea

$$0 < \mu < \varphi_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 1 - \mu < 1. \quad (10)$$

In acest domeniu $P_\mu(\mu, 1-\mu)$ se găsește punctul de atracție al iteratelor transformării T_i.

Fie $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ punctul din P_μ, în care funcția $P_s^{(h+1)}(x)$ ia cea mai mare valoare.

In baza inegalităților (10), în D_μ avem:

$$x_i \varphi_{ij} \varphi_{ijk} \ldots \varphi_{ijk\ldots l} > 0,$$

și egalitatea (9) devine

$$P_s^{(h+r)}(x') = P_s^h(\varphi'_{ijk\ldots l_1}, \varphi'_{ijk\ldots l_2}, \ldots, \varphi'_{ijk\ldots lm}),$$

unde $\varphi'_{ijk\ldots lh}$ este valoarea funcției $\varphi_{ijk\ldots lh}$ în punctul x'.

In mod analog, dacă notăm prin $x_1'', x_2'', \ldots, x_m''$ punctul în care $P_s^{(h+s)}(x)$ ia cea mai mică valoare în D_μ, vom avea:

$$P_s^{(h+r)}(x'') = P_s^{(h)}(\varphi''_{ijk\ldots l1}, \varphi''_{ijk\ldots l2}, \ldots, \varphi''_{ijk\ldots lm}),$$

unde

$$\varphi''_{ijk\ldots l_h} = \varphi_{ijk\ldots l_h}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'').$$

Pentru a utiliza relaţia (β), să alegem în relaţia precedentă toţi indicii egali cu i. Vom avea:

$$P_s^{(h+r)}(x_1', x_2', \ldots, x_m') = P_s^{(h)}[\varphi'_{ii\ldots i1}, \varphi'_{ii\ldots i2}, \ldots, \varphi'_{ii\ldots im}],$$

$$P_s^{(h+r)}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'') = P_s^{(h)}[\varphi''_{ii\ldots i1}, \varphi''_{ii\ldots i2}, \ldots, \varphi''_{ii\ldots im}].$$

Cum prin ipoteză

$$\varphi'_{ii\ldots il} \to \varphi_l,$$

$$\varphi''_{ii\ldots il} \to \varphi_l,$$

cînd r tinde către infinit, funcţiile $P_s^{(h+n)}$ fiind egal continue, putem găsi un număr η, astfel ca, oricare ar fi ε dat, să avem pentru $|z_i'' - z_i'| < \eta$:

$$|P_s^{(h)}(z'') - P_s^{(h)}(z')| < \varepsilon.$$

Dacă alegem pe r suficient de mare pentru ca:

$$|\varphi''_{ii\ldots il} - \varphi'_{ii\ldots il}| < \varepsilon\eta \quad (l = 1, 2, \ldots, m),$$

vom avea:

$$|P_s^{(h)}(\varphi''_{ii:\ldots i1}, \varphi''_{ii\ldots i2}, \ldots, \varphi''_{ii\ldots im}) - P_s^{(h)}(\varphi'_{ii\ldots i1}, \varphi'_{ii\ldots i2}, \ldots, \varphi'_{ii\ldots im})| < \eta$$

sau, dacă ţinem seama de (10),

$$|P_s^{(h+r)}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'') - P_s^{(h+r)}(x_1', x_2', \ldots, x_m')| < \eta.$$

Dacă notăm cu $M_s^{(\mu)}$ şi $m_s^{(\mu)}$ limitele superioare şi inferioare ale funcţiei $P_s^{(h+r)}$ în domeniul D_μ, în baza unei observaţii anterioare rezultă:

$$M_s(\mu) = P_s^{(h+r)}(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

$$m_s(\mu) = P_s^{(h+r)}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'').$$

Inegalitatea precedentă ne va da deci

$$M_s(\mu) - m_s(\mu) \leqq \eta,$$

oricare ar fi η, ceea ce implică

$$M_s(\mu) = m_s(\mu).$$

Aceasta dovedeşte că funcţia $P_s^{(h)}$ este o constantă în domeniul D_μ, oricît de mic ar fi μ, deci în domeniul D_μ în întregime.

Scanned with OKEN Scanner

Putem deci scrie

$$\lim_{n\to\infty} P_s^{(h)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_s,$$

unde P_s este o constantă și ergodicitatea este astfel demonstrată.

§ 5. Condițiile de ergodicitate ale lui C. Ionescu-Tulcea și Gh. Marinescu

1. *O clasă de operatori aproape complet continui.* Operatorul definit de (5) § 4 face parte din clasa de operatori aproape complet continui definiți de *C. Ionescu-Tulcea* și *Gh. Marinescu.*

Se consideră un spațiu Banach E cu norma $\| x \|$ și un subspațiu F al spațiului liniar E, care este și el un spațiu Banach cu norma $\| x \|$.

Presupunem, în plus, că este îndeplinită următoarea condiție: orice șir x_n din elemente ale spațiului F, cu norma uniform mărginită $\| x_n \| < A$, avînd limita x în E astfel că $| x_n - x | < 0$ cînd $n \to \infty$, implică apartenența lui x la F și $\| x \| \leq A$.

Vom nota cu $C(B, E)$ clasa operatorilor T lucrînd asupra elementelor x din B și pentru care $Tx \in B$, mărginiți ($\| T \| < \infty$), distributivi și satisfăcînd încă următoarele condiții:

a) există o constantă pozitivă B pentru care $| T^n |_B \leq B$, pentru orice n întreg;

b) există două constante pozitive K și $k (0 < k < 1)$, pentru care $| Tx | \leq k \| x \| + K | x |$, pentru orice $x \in B$;

c) pentru orice parte X mărginită în B, TX este compactă în E.

Acești operatori au următoarea proprietate:

Fiecărui operator T îi corespunde un număr finit de valori proprii de modul unu. Dacă numim cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ aceste valori proprii, vom avea:

$$T^n = \sum_{j=1, 2, \ldots, p} \frac{1}{\lambda_j^n} T_j + S^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

unde T_j sînt operatori asupra elementelor lui B, pentru care Tx aparțin unei părți liniare a lui B, de dimensiune finită, și

sînt distribuitive şi mărginite, iar S este o operaţie distributivă şi mărginită, cu următoarele proprietăţi:

$$T_i^2 = T_i; \quad T_i T_j = 0 - (i+j); \quad T_i S = S T_i = 0;$$

$$\| S^n \| \leq \frac{C}{(1+c)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

C şi c fiind două constante pozitive.

Aceasta înseamnă că T este cvasicomplet continuă şi normele $\| T^m \|$ sînt uniform mărginite.

2. *Condiţii în care relaţia funcţională* (5) *defineşte un operator de tipul* $C(B, E)$. Să notăm cu P un vector de componente $P_1, P_2, \ldots, P_m$ cu proprietăţile

$$P_{j \geq 0}, \sum_{j=1, 2, \ldots, m} P_j = 1, \tag{1}$$

cu p un alt vector al aceluiaşi spaţiu şi să punem $h(p, E_j) = \sum_h \delta_{hj} p_h$, unde δ_{hj} este simbolul lui Kronecker.

Fie, de asemenea, pentru fiecare $j = 1, 2, \ldots, m$, vectorul $\varphi_j(\varphi_{jk}(p_1, p_2, \ldots, p_m))$, care *aplică subspaţiul vectorial* (1) *în el însuşi.*

Să presupunem că distanţa între două puncte p' şi p'' ale spaţiului (1) este dată de

$$[p', p''] = \sup [p'_j - p''_j]$$

şi că există o constantă r cuprinsă între 0 şi 1 pentru care

$$[\varphi_j(p'), \varphi_j(p'')] \leq r [p', p''], \tag{i}$$

r fiind independentă de p', p'' şi j.

Fie acum o funcţie continuă $P(p)$ definită pe (1) şi cu valori în (1) şi care are încă proprietatea că există un $d > 0$, astfel că pentru fiecare r

$$\frac{P_r(p') - P_r(p'')}{[p', p'']}$$

are o margine superioară finită cînd p', p'' sînt în (1) fără ca $p' = p''$. Notăm cu $m(P_r, d)$ această margine superioară. Se poate lua ca normă pentru $P_r(p)$

$$\| P_r(p) \| = m(P_r, d) + \max | P_r(p) |.$$

Scanned with OKEN Scanner

Operatorul T este definit în condițiile teoremei lui C. Ionescu-Tulcea și G. Marinescu astfel:

$$T P_r(p) = \sum_{j=1,\,2,\ldots,\,m} h(p, E_j)\, P_r(\varphi_j(p)).$$

Dacă punem

$$T P_r^{(n)}(p) = P_r^{(n+1)}(p),$$

rezultă că mulțimea $P_r^{(n+1)}(p)$ este compactă și de aici rezultă ergodicitatea.

Demonstrarea acestei afirmații se poate face și direct folosind, cu condițiile indicate mai sus, mersul demonstrației de la § 4.

3. *Condiții ca relația funcțională a lanțurilor cu legături complete să definească un operator* $C(E, B)$. Să definim distanța în spațiul șirurilor după cum urmează: dacă s este drumul $E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, \ldots$, și s' este drumul $E'_{j_1}, E'_{j_2}, \ldots, E'_{j_n}, \ldots$, atunci

$$[s, s'] = \sum_{n=1,\,2,\ldots} k^n \left| j_n - j'_n \right|,$$

$$(j_n, j'_n = 1, 2, \ldots, m)$$

Să presupunem transformarea $\varphi_i(s)$, care, în spațiul șirurilor, duce de la drumul finit s la drumul $s+i$ și satisface relația

$$[\varphi_i(s), \varphi_i(s')] < r\,[s, s'] \qquad 0 < r < 1,$$

pentru r independent de s, s' și de i.

Fie acum un vector $P(s)$ de componente $P_j(s)$, determinat pentru fiecare drum finit, cu valori în spațiul

$$P_j(s) \geqq 0 \qquad \sum_{j=1,\,2,\ldots,\,m} P_j(s) = 1.$$

Componentele acestui vector verifică condițiile cerute pentru funcțiile f. Prin urmare, dacă punem

$$h(P, E_j) = \sum_{h=1,\,2,\ldots,\,m} \delta_{hj} P_h(s),$$

relația (5) rezultă din iterația operației definită de

$$T P_j(s) = \sum_i h(P, E_j)\, P_j(\varphi_i(s)),$$

care intră în clasa $C(E, B)$.

§ 6. Corespondența între un lanț cu legături complete și un lanț Markov

1. Să presupunem că șirurile

$$E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_n}, E_{j_{n+1}}, \ldots \tag{1}$$

ale spațiului de șiruri (1) sînt lanțuri cu legături complete, definite de probabilitățile de trecere (5).

Aceasta înseamnă că probabilitatea trecerii de la evenimentul E_{j_n} $(j_n = 1, 2, \ldots, m)$ la $E_{j_{n+1}}$ $(j_{n+1} = 1, 2, \ldots, m)$ este $\varphi_{j_n j_{n+1}}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, probabilitățile evenimentelor E_{j_n} $(j_n = 1, 2, \ldots, m)$ fiind respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Deci, probabilitatea de trecere de la vectorul de probabilitate $p(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ la $\varphi_i(\varphi_{i1}(p), \varphi_{i2}(p) \ldots \varphi_{im}(p))$ este p_i.

Vectorii de probabilitate a evenimentelor succesive din șirul (1) constituie deci un lanț aparținînd unui tip foarte apropiat de lanțurile Markov sau de unele lanțuri folosite de R. Fortet.

Urmează un exemplu în care lanțul probabilităților este chiar un lanț Markov.

Construim un lanț simplu cu legături complete în modul următor:

Se consideră două funcții $\varphi(x)$ și $\psi(\alpha)$ cu valori întregi pozitive cuprinse între 0 și a dacă α are valori întregi cuprinse între 0 și a.

O urnă conține în total a bile albe și negre. Compoziția ei se schimbă după fiecare extracție în modul următor:

Dacă urna U_n conține $\alpha_1^{(n)}$ bile albe și $\alpha_2^{(n)}$ bile negre $(\alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)} = a)$ și dacă extracția ne dă o bilă albă, vom schimba compoziția urnei astfel:

$$U'_{n+1}: \quad \alpha_1^{(n)} = \varphi(\alpha_1), \quad \alpha_2^{(n)} = a - \varphi(\alpha_1).$$

Dacă extracția a dat o bilă neagră, vom lua

$$U''_{n+1}: \quad \alpha_1^{(n)} = a - \psi(\alpha_1), \quad \alpha_2^{(n)} = \psi(\alpha_1).$$

Vectorul probabilităților corespunzător urnei U_n este p, avînd componentele

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{a}, \quad p_2 = \frac{\alpha_2}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru urna U_{n+1} avem cei doi vectori:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1\left(\varphi_{11}=\frac{\varphi(a\,p_1)}{a},\quad \varphi_{12}=1-\frac{\varphi(a\,p_1)}{a}\right),\\ &\varphi_2\left(\varphi_{21}=1-\frac{\psi(a\,p_1)}{a},\quad \varphi_{22}=\frac{\psi(a\,p_1)}{a}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Evenimentele lanțului Markov pot fi, deci, reprezentate prin punctele de pe segmentul intersectat de semiaxele pozitive rectangulare Ox, Oy pe dreapta $x+y=1$ și avînd abscisele

$$x=0,\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a},\ \ldots,\ \frac{a}{a}.$$

De fiecare punct $p\,(p_1, p_2)$, punctul care urmează este unul sau altul dintre cele două puncte determinate în (2). Probabilitatea de trecere este pentru primul caz p_1, iar pentru cel de-al doilea p_2.

Să notăm cu $P_n(p^0)$ probabilitatea de a obține o bilă albă în extracția de rang n, dacă $p_1^0=\frac{\alpha_1}{a}$ pentru urna originară. Să notăm de asemenea cu $Q_n(k, p_1^0)$ probabilitatea de a obține o bilă albă în extracția de rang n, cu probabilitatea $k\left(=0, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a}{a}\right)$. Vom avea, evident

$$P_n(p_1^0)=\sum_{k=\frac{1}{a},\frac{2}{a},\ldots,\frac{a}{a}} k\,Q_n(k, p_1^0). \tag{3}$$

Această egalitate ne arată între altele că, presupunînd că lanțul Markov al probabilităților este ergodic, deci $Q_n(k, p_1^0)$, cînd n tinde spre infinit, tind către o limită independentă de p_1^0, atunci și lanțul cu legături complete este ergodic, deoarece în acest caz și limita $P_n(p_1^0)$, cînd n tinde către infinit, există și este independentă de p_1^0.

2. *Exemple.* Două cazuri numerice pentru un șir de urne cu două bile ($a=2$) vor exemplifica cele două eventualități care se pot ivi

1°. $\varphi(0)=2,\ \varphi(1)=2,\ \varphi(2)=1,\ \psi(0)=1,\ \psi(1)=0,\ \psi(2)=2.$

Lanțul Markov al probabilităților este ergodic, deci și lanțul cu legături complete este ergodic.

2°. $\varphi(0)=1,\ \varphi(1)=2,\ \varphi(2)=0,\ \psi(0)=2,\ \psi(1)=0,\ \psi(2)=1.$

Lanțul Marcov al probabilităților nu este, în acest caz, ergodic.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc*: Sur les chaînes à liaisons complètes, Comptes Rendus, t. 200, Paris, 1935.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc*: Sur les chaînes à liaisons complètes, Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 59, Paris, iunie 1935.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc*: Sur les chaînes statistiques. Comptes Rendus, t. 202, Paris, 1936.

W. Doeblin et *R. Fortet*: Sur certaines chaînes à liaisons complètes, Bull. Sciences Mathématiques, t. 65, Paris, 1937.

O. Onicescu: La théorie générale des chaînes à liaisons complètes (La reunion de Génève, 1937). Actualités scientifiques nr. 737, Hermann, Paris, 1938.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc*: La dépendance statistique, Actualités scientifiques nr. 503, Hermann, Paris, 1938.

R. Fortet: Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et leurs applications à la théorie des probabilité en chaîne, Thèse, Paris, 1938.

K. Yosida and *S. Kakutani*: Operator theoretical treatment of Markov's process and the ergodic theorem. Ann. of Math., vol. 42, 1941.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc*: Sur les chaînes de variables aléatoires. Problèmes asymptotiques, Etudes et recherches, vol. 14, Ac. Romînă, 1943.

C. Ionescu-Tulcea et *G. Marinescu*: Sur certaines chaînes à liaisons complètes, Comptes Rendus, t. 227, Paris, 1948.

C. Ionescu-Tulcea et *G. Marinescu*: La théorie ergodique pour les classes d'opérations non complètement continues, Ann. of Math., vol. 52. nr. 1, 1950.

G. Marinescu: Operații relativ complet continue, Studii și Cercetări Matematice, vol. II, Ac. R. P. R, 1950.

B. De Finetti: Colloque sur les probabilités, Génève, 1937, Actualités scientifiques, vol. 738, Hermann, Paris, 1938.

G. Ciucu: Lanțuri cu legături complete cu densitate, Comunicările Ac. R. P. R., nr. 7—8, 1954.

A. Blanc — Lapierre & R. Fortet: Théorie des fonctions aléatoires, Messa, Paris, 1953.

T. E Harris: On chaines of infinite order, Pacific Journal of Math., vol. 5, 1955.

CAPITOLUL IV

CÎMP INFINIT DE PROBABILITATE

§ 1. Definiții

1. *Cîmp de evenimente.* Numim cîmp de evenimente în sens restrîns — sensul adoptat în această expunere — un sistem K de părți ale unei mulțimi E cu următoarele proprietăți:

$$E \in K \quad ; \quad \Phi \in K; \tag{c}$$

$$\text{dacă } A \in K, \text{ atunci } \complement A \in K; \tag{c'}$$

$$\text{dacă } A_j \in K, \text{ pentru } j \in N, \text{ atunci } \bigcup_{j \in N} A_j \in K, \tag{c''}$$

N fiind mulțimea numerelor naturale.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimile s componente ale lui K sînt *evenimentele* cîmpului. Punctele care compun pe E și pe care le vom reprezenta, în general, prin ξ, η, se numesc evenimentele elementare ale cîmpului. Astfel de puncte, considerate ca părți din E, pot face parte din K.

Din axiomele (c), (c') și (c'') rezultă cîteva alte proprietăți importante; în primul rînd, următoarea:

$$\text{dacă } A \in K, \quad B \in K \quad \text{atunci} \quad A \cap B \in K.$$

Observație. In prima axiomă se afirmă că evenimentul sigur E și evenimentul imposibil Φ aparțin sistemului K, în loc de a afirma că mulțimea vidă trebuie considerată drept complement al mulțimii E. O afirmație de semnificație pentru evenimentul imposibil Φ în cadrul cîmpului de evenimente este în orice caz necesară.

2. *Probabilizarea cîmpului de evenimente.* Probabilitatea evenimentelor cîmpului este o funcție $P(A)$ de mulțime cu următoarele proprietăți:

$$P(A) \geq 0; \tag{p}$$

$$P(E) = 1; \tag{p'}$$

$$P(\complement A) = 1 - P(A); \tag{p''}$$

$$P\left(\bigcup_{j \in N} A_j\right) = \sum_{j \in N} P(A_j); \tag{p'''}$$

dacă $A_j \cap A_k = \Phi$, cînd $j = k$.

Axioma (p'') împreună cu (p') arată că

$$P(\Phi) = 0.$$

Probabilitatea evenimentului imposibil este nulă. Aceasta nu înseamnă că orice eveniment cu probabilitatea nulă este imposibil.

Axioma (p''') se mai numește și axioma aditivității totale sau complete a probabilității considerată ca funcție de mulțime.

Să luăm două evenimente disjuncte A și B și evenimentul Φ de o infinitate de ori; deoarece

$$A \cap B = \Phi, \quad \Phi \cap A = \Phi, \quad \Phi \cap B = \Phi, \quad \Phi \cap \Phi = \Phi,$$

putem aplica axioma (p''') și, ținînd seamă că

$$A \cup B \cup \Phi \cup \Phi \ldots = A \cup B$$

și că $P(\Phi) = 0$, obținem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, este valabilă și aditivitatea finită.

Noțiunea de *probabilitate condiționată* și toate consecințele sale se transpun de la cîmpul finit, fără modificare.

§ 2. Variabile aleatorii. Valori medii

1. *Definiții. O funcție* $x=f(\xi)$ *este o variabilă aleatorie pe cîmpul* $\{E, K\}$ *dacă este determinată pentru orice* $\xi \in E$ *și este măsurabilă pe acest cîmp.*

Să notăm, pentru simplificarea expunerii, cu E_A mulțimea punctelor ξ, pentru care $f(\xi)$ aparține mulțimii măsurabile A din mulțimea numerelor reale R:

$$E_A = \{\xi \mid f(\xi) \in A\}.$$

Măsurabilitatea funcției $f(\xi)$ corespunde faptului că

$$E_A \in K.$$

Dacă punem $E_a = E_A$, cînd A este intervalul $x < a$, putem enunța următoarea

Teoremă. Condiția necesară și suficientă pentru măsurabilitatea funcției $f(\xi)$ *este implicația* $E_a \in K$ *pentru orice* a.

Aceste condiții se pot varia luînd pentru A intervalele $x \leq a$ sau $x > a$, sau $x \geq a$.

2. *Proprietăți.* a) *Dacă* $g(x)$ $(x \in R)$ *este o funcție măsurabilă-Borel și* $f(\xi)$ *este o variabilă aleatorie a cîmpului* $\{E, K\}$, *funcția* $g(f(\xi))$ *este de asemenea o variabilă aleatorie a acestui cîmp.*

In adevăr, dacă $g(x) < a$, $x = f(\xi) \in A$, deci $\xi \in E_A$.

b) $|f(\xi)|$ este măsurabilă dacă $f(x)$ este măsurabilă.

c) Dacă $g(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ este o funcție măsurabilă-Borel pe spațiul euclidian R^n și $f^1(\xi), f^2(\xi), \ldots, f^n(\xi)$ sînt variabile aleatorii în $\{E, K\}$, funcția $g(f^1(\xi), f^2(\xi), \ldots, f^n(\xi))$ este o variabilă aleatorie.

In particular, funcțiile $f+g$, fg sînt măsurabile o dată cu f și g.

3. *Valoarea medie* $M(x) = M[f(\xi)]$ a variabilei aleatorii $x = f(\xi)$ pe cîmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$ se obține prin extinderea valorii medii a variabilelor simple definite în cap. II.

Se demonstrează că *orice variabilă aleatorie* $x=f(\xi)$ *a cîmpului* $\{E, K, P\}$ *este limită uniformă a unui şir de variabile simple:*

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n. \tag{1}$$

Dacă, odată cu (1), $\lim_{n\to\infty} M(x_n)$ *există şi este independentă de şirul considerat, atunci, prin definiţie,*

$$M(x)=\lim_{n\to\infty} M[x_n]. \tag{2}$$

Vom scrie

$$M(x)=\int_E f(\xi)\,P(d\xi). \tag{3}$$

Aceasta este *integrala Lebesgue* sau *integrala* funcţiei $f(\xi)$, cu măsura P, pe mulţimea E. Proprietăţile acestei integrale sînt proprietăţile generale ale valorii medii.

Se demonstrează că pentru existenţa integralei $M(f)$ *este necesar şi suficient ca* $M[|f|]$ *să existe.*

Se demonstrează de asemenea că $M[f]$ *există ori de cîte ori funcţia* $x=f(\xi)$ *este mărginită.*

O dată cu $\{E, K, P\}$, este cîmp de probabilitate şi $\{A, K_A, P_A\}$, unde A este o mulţime din K de măsură $P(A)\neq 0$, K_A este mulţimea evenimentelor din K incluse în A, iar $P_A=\frac{1}{P(A)}P$. O variabilă $f(\xi)$ măsurabilă în cîmpul $\{E, K\}$ este măsurabilă şi în cîmpul $\{A, K_A\}$, deoarece $E_{(a)}\cap A\in K_A$. Prin urmare, conform definiţiei precedente

$$M[f]_A=\frac{1}{P(A)}\int_A f(\xi)\,P(d\xi),$$

deci integrala din membrul al doilea există.

Am definit astfel integrala funcţiei $f(\xi)$ pe mulţimea A cu măsura P:

$$I(f, A)=\int_A f(\xi)\,P(d\xi).$$

Această integrală este:

1°. *Funcţională liniară de* f:

$$I(f_1+f_2, A)=I(f_1, A)+I(f_2, A),$$
$$I(\lambda f, A)=\lambda I(f, A).$$

Această funcțională este continuă:

$$|f(\xi)| \leq M \rightarrow |I(f, A)| \leq M.$$

2°. *Funcție total aditivă de mulțime pe K:*

$$I(f, \bigcup_i A_j) = \sum_j \sum (f, A_j),$$

adică $A_j \cap A_k = \Phi$ $(j \neq k)$.

3°. *Funcție absolut continuă.* Dacă $P(A)=0$, atunci

$$\int_A f(\xi) P(d\xi) = 0.$$

4. *Momentul de ordinul r al variabilei aleatorii* este, ca și momentul de ordinul întîi, extinderea momentului de ordinul r al unei variabile simple:

$$M_r[f(\xi)] = M[(f(\xi))^r] = \int_E [f(\xi)]^r P(d\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF(x),$$

dacă această integrală, definită mai departe, există.

Se mențin relațiile de inegalitate dintre momente, stabilite pentru variabilele simple.

Teorema lui Cebîșev este valabilă pentru orice variabilă aleatorie:

$$P(\{\xi \,|\, |f(\xi)| < \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{M_r(|f|)}{\varepsilon^r} \quad r = 1, 2, \ldots,$$

iar demonstrația corespunde aceleia dată în cazul variabile simple.

Dispersia variabilei $f(\xi)$ este

$$\mu^2 = M[(f(\xi) - M(f))]^2.$$

Corelația între două variabile $f(\xi)$, $g(\xi)$ este

$$M[(f(\xi) - M[f])(g(\xi) - M[g])].$$

5. Independența variabilelor aleatorii.

a) *Variabilele $f_1(\xi)$ și $f_2(\xi)$ sînt independente dacă, A_1 și A_2 fiind două mulțimi boreliene oarecare din R* (mulțimea numerelor reale) *și $E_{f_i A_i}$ [mulțimea punctelor ξ din E pentru care $f_i(\xi) \in A_i$ $(i=1, 2)$], avem:*

$$P(E_{f_1, A_1} \cap E_{f_2, A_2}) = P(E_{f_1, A_1}) P(E_{f_2, A_2}). \tag{4}$$

b) Variabilele $f_j(\xi)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ sînt independente în totalitatea lor, dacă, *pentru orice grup de variabile* $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_k$, avem:

$$P\left(\bigcap_{l=1, 2, \ldots, k} E_{f_{jl}, A_{jl}}\right) = \prod_l P(E_{f_{jl}, A_{jl}}). \tag{5}$$

c) Variabilele $f_j(\xi)$ $(j=1, 2, \ldots)$ sînt independente *Steinhaus*, în totalitatea lor, dacă pentru orice grup finit de variabile avem egalitatea (2).

6. *Spațiile* L_p *și relațiile între momentele de diferite ordine.* Prin definiție, spațiul L_p relativ la cîmpul $\{E, K, P\}$ este mulțimea variabilelor aleatorii care au un moment absolut de ordinul p:

$$M_p[f] = \int_E |f(\xi)|^p p(d\xi) < \infty.$$

Inegalitățile demonstrate pentru momentele unui cîmp finit se extind la un cîmp oarecare, cu singura condiție a existenței acestor momente.

Vom reține inegalitatea (21), § 3, cap. II, care devine

$$\int_E |f(\xi)|^\alpha |g(\xi)|^\beta p(d\xi) \leq \left[\int_E |f(\xi)|^p p(d\xi)\right]^{\frac{\alpha}{p}} \left[\int_E |g(\xi)|^q p(d\xi)\right]^{\frac{\beta}{q}},$$

cu relația

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1.$$

In particular, dacă luăm $\alpha=1$, $p=2$; $\beta=1$, $q=2$, rezultă

$$\int_E |f(\xi) g(\xi)| p(d\xi) \leq \left[\int_E |f(\xi)|^2 p(d\xi)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_E |g(\xi)|^2 p(d\xi)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prin urmare, *dacă* $f(\xi) \in L_2$ *și* $g(\xi) \in L_2$, *atunci* $f(\xi) g(\xi) \in L_1$. Reținem de asemenea inegalitatea

$$\int_E |f(\xi)|^p p(d\xi) \leq \left[\int_E |f(\xi)^{kp} p(d\xi)\right]^{\frac{1}{k}}.$$

Prin urmare, dacă $f(\xi) \in L_r$, deci dacă există un moment de ordinul r, $f(\xi)$ are momente de toate ordinele mai mici:

$$f(\xi) \in L_p \quad (1 \leq p \leq r).$$

7. *Valorile medii ale sumei și produsului.* Prin extinderea rezultatului obținut în cazul cîmpului finit, avem următoarele două teoreme importante:

1°. $M(f+g)=M(f)+M(g)$.

2°. $M(fg)=M(f)\,M(g)$, dacă variabilele $f(\xi)$ și $g(\xi)$ sînt independente.

Dacă $M(fg)=M(f)\,M(g)$, iar $f(\xi)$ și $g(\xi)$ nu sînt independente, ele se numesc necorelate.

§ 3. Funcția de repartiție

1. *Definiție și proprietăți.* Prin definiție, dacă E_a este mulțimea pentru care $x=f(\xi)<a$, expresia

$$P(E_a)=F(a) \tag{1}$$

se numește *funcția de repartiție* a variabilei aleatorii.

Următoarele proprietăți sînt imediate:

a) $0 \leq F(a) \leq 1$;

b) $F(a)$ este monotonă descrescătoare: $F(a'') \geq F(a')$, dacă $a'' > a'$;

c) $F(+\infty)=\lim\limits_{a\to\infty} F(a)=1$, în legătură cu $E_\infty = E$;

d) $F(-\infty)=\lim\limits_{a\to-\infty} F(a)=0$, în legătură cu $E_{-\infty}=\Phi$;

e) $F(a)$ este continuă la stînga: $F(a-0)=F(a)$, în legătură cu $E_{a-0}=E_a$.

2. *Discontinuitățile funcției de repartiție.* Dacă $f(\xi)$ este o variabilă simplă, susceptibilă de valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, avem, potrivit cu (1),

$$F(x)=\sum_{x_j<x} p_j.$$

Funcția $F(x)$ este discontinuă în fiecare dintre punctele x_j; discontinuitatea este reprezentată de un salt pozitiv egal cu p_j.

Teoremă. Mulțimea punctelor de discontinuitate a le funcție $F(a)$ este numărabilă.

Scanned with OKEN Scanner

Să numerotăm cu $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_n}$ $(k_n < n)$ punctele în care salturile funcției $F(a)$ sînt cuprinse între $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{n+1}$. Cînd n tinde către infinit, avem astfel un șir, deci o mulțime numărabilă, în care intră orice punct de discontinuitate.

Rezultă că mulțimea punctelor în care $F(a+0)=F(a)$ are puterea continuului.

3. *Teorema lui Helly. Dacă $F_\alpha(x)$ este o familie infinită de funcții monotone nedescrescătoare, cu variație mărginită, din orice șir $F_n(x)$ infinit aparținînd familiei putem extrage un șir $F_{n_s}(x)$ care are o limită determinată $F(x)$ în toate punctele de continuitate ale acestuia.*

In aplicarea acestei teoreme des folosită în teoria probabilităților sînt de observat următoarele:

Dacă $\lim F_n(x)=F(x)$ în toate punctele de continuitate și dacă variația totală a fiecăreia dintre funcțiile $F_n(x)$ este mărginită, variația totală a limitei poate fi nemărginită. Numai dacă mărginirea variațiilor este uniformă, față de n, se poate ajunge la concluzia că variația funcției $F(x)$ este mărginită.

Dacă $\lim F_n(x)=F(x)$ de asemenea în punctele de continuitate și dacă variația totală a fiecăreia dintre funcțiile $F_n(x)$ este l, aceasta implică numai concluzia că variația totală a funcției $F(x)$ este cel mult egală cu l, cum arată exemple foarte ușor de construit.

4. *Integrala Stieltjes.* Fiind dată o funcție continuă $a(x)$ în intervalul (a, b), integrala

$$I=\int_a^b a(x)\,dF(x),$$

unde $F(x)$ este o funcție monotonă nedescrescătoare continuă în a și b, cu variația mărginită în (a, b), este limita unică a sumelor

$$S_j=\sum_{i=1,2,\ldots,n} a(x_i)\,[F(x_{i+1})-F(x_i)]$$

cu $x_1=a$, $x_{n+1}=b$ pentru orice diviziune δ prin puncte x_i de continuitate ale funcției $F(x)$, cînd $\sup_{i=1,2,\ldots,n}(x_{i+1}-x_i)$ tinde către zero.

Dacă limita acestei integrale există cînd, $a(x)$ fiind continuă pentru orice x real, $a\to-\infty$, $b\to\infty$, atunci integrala pe care o vom folosi în mod curent se scrie

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,dF(x).$$

Condiția *necesară* și *suficientă* pentru existența integralei I este ca

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|\,dF(x)$$

să aibă o valoare finită.

Se demonstrează fără greutate că, pentru orice funcție continuă și mărginită

$$|a(x)|<M \qquad x\in R,$$

integrala I are o valoare finită, cuprinsă între limita superioară și cea inferioară a funcției $a(x)$.

5. *Egalitatea integralei Stieltjes cu integrala Lebesgue.* Se demonstrează că

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,dF(x)=\int_{E} a(f(\xi))\,P(d\xi),$$

cînd ambele integrale există; în particular, deci, cînd funcția $a(x)$ este mărginită.

6. *Funcția de repartiție a unui vector*

$$x\,[x^1=f^1(\xi),\quad x^2=f^2(\xi),\ldots,x^n=f^n(\xi)],$$

definit pe spațiul E și cu valori în spațiul euclidian cu n dimensiuni. Componentele $x^j=f^j(\xi)\,(j=1,2,\ldots,n)$ sînt variabile aleatorii ale cîmpului $\{E,K,P\}$. Notăm

$$E_{a_1,a_2;\ldots,a_m}=\{\xi\,|\,f^1(\xi)<a_1,f^2(\xi)<a_2,\ldots,f^n(\xi)<a_n\}.$$

Prin definiție, *funcția de repartiție* a vectorului x sau *funcția de repartiție conjugată* a variabilelor $x_1,x_2,\ldots,x_n$ este

$$F(a)=F(a^1,a^2,\ldots,a^n)=P(E_{a^1,a^2,\ldots,a^n}). \qquad (2)$$

Lăsăm pe seama cititorului să precizeze proprietăţile generale ale acestor funcţii, după modelul funcţiei de repartiţie a unei singure variabile.

Integrala Stieltjes, corespunzătoare, pentru o funcţie continuă $a(x)=a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ într-un interval finit

$$D: \quad c^1 \leqq x^1 \leqq d^1, \ldots, c^n \leqq x^n \leqq d^n, \tag{3}$$

se notează

$$I_D = \int_D a(x)\, dF(x)$$

şi reprezintă limita unică a sumelor de forma

$$S_{D,\delta} = \sum_{j_1, j_2, \ldots j_n} a(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, \ldots, x^n_{j_n})\, \Delta^n F(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, \ldots, x^n_{j_n})$$

pentru orice diviziune δ în intervale de tipul (3) ale domeniului D, cînd aceste intervale tind uniform către zero. Punctele de diviziune sînt puncte de continuitate ale funcţiei F, iar Δ^n este diferenţa obişnuită de ordinul n calculată în vîrfurile celulei respective.

Dacă $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ are în orice punct al domeniului D derivata $\dfrac{\partial^n F}{\partial x^1\, \partial x^2 \ldots \partial x^n} = \rho(x)$, aceasta este *densitatea de repartiţie*, şi integrala I_D ia forma

$$I_D = \int_D a(x)\, \rho(x)\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Dacă D este întreg spaţiul R^n şi integrala astfel extinsă există, atunci există egalitatea între cele două integrale

$$\int_{R^n} a(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dF(x) = \int_E a(f^1(\xi), f^2(\xi), \ldots, f^n(\xi))\, P(d\xi).$$

§ 4. Funcţia caracteristică

Fiecărei variabile aleatorii $x = f(\xi)$ îi corespunde o funcţie de repartiţie $F(a)$. Calculul direct cu aceste funcţii, care în general sînt discontinue, prezintă dificultăţi. De aceea, se introduce pentru caracterizarea repartiţiei o funcţie continuă cu valori complexe, numită *funcţie caracteristică*.

1. *Definiție. Funcția caracteristică a variabilei x este valoarea medie a variabilei* $e^{iu\,x(\xi)}$, unde u este un parametru *real.*

$$\varphi(u)=\int_E e^{iu\,x(\xi)}P(d\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\,x}\,dF(x). \tag{1}$$

Vom folosi pentru studiul proprietăților funcției caracteristice una sau alta dintre cele două expresii echivalente ale ei.

2. *Proprietățile funcției caracteristice*:

a) $\varphi(0)=1$, deoarece $\varphi(0)=\int_E P(d\xi)=P(E)=1$.

b) $|\varphi(u)|\leqslant 1$, rezultă din proprietățile integralei

$$|\varphi(u)|\leqslant\int_E P(d\xi)=1.$$

c) $\varphi(u)$ este reală dacă distribuția este simetrică. In adevăr, partea complexă aici este

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin ux\,dF(x)=\int_0^{\infty}\sin ux\,d\,[F(x)-F(-x)],$$

care se anulează dacă distribuția este simetrică.

d) $\varphi(u)$ *este continuă pentru orice* u *real.* In adevăr, fie ε un număr pozitiv oricît de mic. Există un număr A astfel că

$$F(-A_\varepsilon)<\varepsilon,\quad 1-F(A_\varepsilon)<\varepsilon. \tag{2}$$

Vom avea atunci

$$\varphi(u+\Delta)-\varphi(u)=\int_{-A_\varepsilon}^{+A_\varepsilon}(e^{i(u+\Delta)x}-e^{iux})\,dF(x)+\alpha_\varepsilon, \tag{3}$$

unde, ținînd seama de (2), se vede imediat că

$$|\alpha_\varepsilon|<4\varepsilon.$$

Deoarece funcția e^{iux} este continuă, iar x este mărginit între $-A$ și A, putem alege un număr η, astfel că

$$|e^{i(u+\Delta)x}-e^{iux}|\leqslant\varepsilon$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă $\Delta<\eta$. In aceste condiţii,

$$|\varphi(u+\Delta)-,(u)|\leq 5\varepsilon,$$

deci teorema este demonstrată.

e) *Dacă există momentele pînă la ordinul n ale variabilei x, funcţia caracteristică are derivate pînă la ordinul n.* In adevăr, dacă există

$$M(x)=\int_E x(\xi)\,P(d\xi),$$

există atunci şi

$$M(|x|)=\int_E |x(\xi)|\,P(d\xi)$$

şi, prin urmare,

$$i\int_E x(\xi)\,e^{iu\,x(\xi)}P(d\xi),$$

care reprezintă $\frac{d\varphi(u)}{du}$. In acelaşi mod se demonstrează proprietatea şi pentru celelalte ordine.

Vom avea, în general, următoarea relaţie între derivatele funcţiei caracteristice şi momente, cînd acestea există:

$$i^k M(x^k)=\left(\frac{d^k\varphi(u)}{du^k}\right)_{u=0}. \tag{4}$$

Dacă funcţia caracteristică este analitică, va rezulta deci următoarea expresie a ei, cu ajutorul momentelor

$$\varphi(u)=1+iM_1u+\frac{i^2M_2}{2!}u^2+\ldots+\frac{i^nM_n}{n!}u^n+\ldots \tag{5}$$

în limita regiunii de convergenţă.

f) *Orice funcţie caracteristică aparţine clasei P a funcţiilor de tip pozitiv.* Funcţiile de tip pozitiv $\varphi(u)$ sînt funcţii continue, definite prin următoarele proprietăţi:

Pentru orice întreg m, orice sistem de valori reale $u_1, u_2, \ldots, u_m$ şi orice sistem de numere complexe $a_1, a_2, \ldots, a_m$, avem:

$$\sum_{h,\,k}^{1,\ldots,m} a_h\bar{a}_k\varphi(u_n-u_k)\geq 0. \tag{6}$$

Se verifică imediat că funcţia caracteristică $\varphi(u)$ este de tip pozitiv. In adevăr,

$$\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k \varphi(u_h - u_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k e^{iu_h x - iu_k x}\right) dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_h a_h e^{iu_h x}\right|^2 dF(x) \geq 0.$$

Faptul important, în legătură cu această proprietate, este dat de

Teorema lui Bochner. Orice funcţie continuă de tip pozitiv $\psi(u)$ *are o reprezentare de forma*

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dG(x),$$

unde $G(x)$ *este o funcţie monotonă nedescrescătoare, cu variaţie totală finită.* Dacă această variaţie este egală cu a, rezultă

$$\psi(u) = a\varphi(u),$$

unde $\varphi(u)$ este o funcţie caracteristică.

Demonstraţia acestei teoreme nu o dăm aici.

3. *Alte proprietăţi.*

Teoremă. Dacă $\varphi_n(u)$ *este un şir de funcţii caracteristice şi* $\varphi(u) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(u)$ *există şi este continuă, atunci limita* $\varphi(u)$ *este o funcţie caracteristică.*

In adevăr, pentru orice n avem:

$$\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k \varphi_n(u_h - u_k) \geq 0.$$

Deci, şi cînd n tinde spre infinit, vom avea:

$$\sum_{h,k} a_h \bar{a}_k \varphi(u_h - u_k) \geq 0,$$

ceea ce arată că $\varphi(u)$ este o funcţie de tip pozitiv. Deoarece $\varphi_n(0) = 1$ pentru orice n, iar $\lim \varphi_n(0) = \varphi(0)$, rezultă $\varphi(0) = 1$; prin urmare, $\varphi(u)$ este o funcţie caracteristică.

Alte consecinţe ale proprietăţilor precedente sînt:

Dacă $\varphi_n(u)$ sînt funcţii caracteristice şi a_n numere pozitive a căror sumă este unu: $\sum a_n = 1$, atunci

$$\varphi(u) = \sum a_n \varphi_n(u)$$

este o funcție caracteristică, fie că este vorba de o sumă finită sau infinită.

Mai general, dacă $\varphi_\alpha(u)$ este o funcție caracteristică pentru orice α real și $H(\alpha)$ este o funcție de repartiție, atunci

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\alpha(u)\,dH(\alpha)$$

este o funcție caracteristică.

4. *Funcția caracteristică a vectorului* $f(\xi)$ aparținînd unui spațiu Hilbert real este

$$\varphi(u)=\int_E e^{iuf(\xi)}P(d\xi), \tag{7}$$

unde $uf(\xi)$ *este produsul scalar între vectorul* $f(\xi)$ *și vectorul arbitrar real* u.

In spațiul euclidian cu n dimensiuni cu reper cartezian expresia de mai sus devine

$$\varphi(u)=\int_E e^{i[u_1f_1(\xi)+u_2f_2(\xi)+\ldots+u_nf_n(\xi)]}P(d\xi), \tag{8}$$

unde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt componentele vectorului u, argumentul funcției caracteristice, iar $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi)$ sînt cele n variabile aleatorii, componentele vectorului aleator $f(\xi)$.

Dacă introducem funcția de repartiție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a acestui vector, putem înlocui (8) prin

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_nx_n)}\,dF(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{9}$$

care constituie generalizarea imediată a reprezentării spectrale (1).

5. *Unicitatea reprezentării* (1). Să presupunem că există două funcții $F_1(x)$, $F_2(x)$ cu proprietățile funcțiilor de repartiție, pentru care avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\,dF_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\,dF_2(x). \tag{10}$$

Aceasta înseamnă că

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, dF_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, dF_2(x),\\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, dF_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, dF_2(x).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Fie $-a$ şi b două puncte de continuitate ale celor două funcţii, pentru care avem $F_1(-a)<\varepsilon$, $F_2(-a)<\varepsilon$, $1-F_1(b)<\varepsilon$, $1-F_2(b)<\varepsilon$. Fie acum alte două puncte oarecare $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ situate între $-a$ şi b, de asemenea puncte de continuitate ale celor două funcţii.

Putem construi pe intervalul de bază $(-a, b)$ o serie Fourier $a_0+\sum_n a_n \cos nx + b_n \sin nx$ care să reprezinte funcţia

$$f(x)=\begin{cases}0 & -a \le x < \alpha,\\ 1 & \alpha \le x \le \beta,\\ 0 & \beta < x \le b.\end{cases}$$

Din (11) rezultă

$$\int_{-a}^{b} f(x)\, dF_1(x) = \int_{-a}^{b} f(x)\, dF_2(x) + \omega,$$

unde $|\omega|<l\varepsilon$, deci, ţinînd seama de valorile funcţiei $f(x)$,

$$F_1(\beta)-F_1(\alpha)=F_2(\beta)-F_2(\alpha)+\omega.$$

Cum $F_1(\alpha)$, $F_1(\beta)$, $F_2(\alpha)$, $F_2(\beta)$ nu depind de ε, rezultă

$$F_1(\beta)-F_1(\alpha)=F_2(\beta)-F_2(\alpha).$$

Facem $\alpha \to \infty$; rezultă

$$F_1(\beta)=F_2(\beta)$$

în orice punct β de continuitate. Deci, reprezentarea (1) este unică.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. Relaţiile între funcţiile de repartiţie şi funcţia caracteristică

1. *Două teoreme de convergenţă.*

Teorema A. Dacă şirul $F_n(x)$ *de funcţii de repartiţie converge către o funcţie* $F(x)$, *şirul* $\varphi_n(u)$ *al funcţiilor caracteristice corespunzătoare converge către funcţia caracteristică* $\varphi(u)$, *corespunzătoare funcţiei* $F(x)$.

Este suficient să observăm că, din convergenţa şirului $F_n(x)$ către $F(x)$, rezultă că $-a$ şi b fiind puncte de continuitate pentru $F(x)$, astfel alese ca $F(-a)<\varepsilon$, $F(\infty)-F(b)<\varepsilon$, putem alege un N_ε astfel ca $|F_n(-a)-F(-a)|<\varepsilon$, $|F_n(b)-F(b)|<\varepsilon$.

Vom scrie atunci

$$\varphi_n(u)-\varphi(u)=\int_{-a}^{b} e^{iux}\,dF_n(x)-\int_{-a}^{b} e^{iux}\,dF(x)+\alpha_n(u),$$

unde $|\alpha_n(u)|\leq 6\varepsilon$. Rămîne să alegem un număr $N'_\varepsilon > N_\varepsilon$, astfel ca diferenţa dintre cele două integrale în intervalul $(-a, +b)$ să fie mai mică decît ε, ceea ce este totdeauna posibil.

Teorema B. Dacă şirul de funcţii caracteristice $\varphi_n(u)$ *converge către o funcţie continuă* $\varphi(u)$, *aceasta este o funcţie caracteristică şi funcţiile de repartiţie* $F_n(x)$ *converg către* $F(x)$ *corespunzătoare lui* $\varphi(u)$.

Am demonstrat la pct. 3, § 4, că o limită continuă de funcţii caracteristice este o funcţie caracteristică. Potrivit teoremei lui Bochner, există deci o funcţie de repartiţie $F(x)$ pentru care

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,dF(x).$$

Rămîne să demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$, bine înţeles în punctele de continuitate ale acesteia.

Potrivit teoremei lui Helly, există totdeauna un subşir $F_{n_s}(x)$ care are o limită $F'(x)$, funcţie monotonă nedescrescătoare de la $-\infty$ la ∞ cu variaţie cel mult egală cu unu. Se demonstrează că în condiţiile teoremei această variaţie este 1. Func-

ţiile respective $\varphi_{n_s}(u)$ au atunci, în baza teoremei precedente, ca limită pe $\varphi(u)$. Prin urmare,

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,dF'(x).$$

Toate limitele şirului $F_n(x)$ sînt funcţii de repartiţie, care corespund aceleiaşi funcţii caracteristice. Ţinînd seama de unicitatea reprezentării, toate aceste limite sînt egale cu $F(x)$ şi teorema este demonstrată.

Teoremele A şi B sînt fundamentale. In special teorema B dă posibilitatea, în diferite teoreme limită, să operăm cu funcţii caracteristice, ceea ce este, în general, mai uşor.

2. *Teorema de inversiune.* Vom demonstra următoarea teoremă:

$$F(x'')-F(x')=\frac{1}{2\pi}\lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u}\varphi(u)\,\frac{e^{-iux''}-e^{-iux'}}{-iu}\,du \qquad (1)$$

pentru orice puncte x' şi x'' de continuitate ale funcţiei de repartiţie $F(x)$, $\varphi(u)$ fiind funcţia caracteristică corespunzătoare.

Formula (1) este adevărată pentru orice variabilă aleatorie simplă. In adevăr, fie $x=f(\xi)$ o variabilă care ia valorile, scrise în ordine crescătoare $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu probabilităţile respective $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Pentru această variabilă

$$F(x)=\sum_{x_j<x} p_j \qquad x\neq x_1, x_2, \ldots, x_j$$

şi

$$\varphi(u)=\sum_{h=1,2,\ldots,n} p_h e^{iux_h}.$$

Să observăm că

$$J_{h,u}=\int_{-u}^{u} e^{iux_h}\,\frac{e^{-iux''}-e^{-iux'}}{-iu}\,du=\int_{-u}^{u} du\int_{x'}^{x''} e^{iu(x_h-x)}\,dx=$$

$$=2\int_{x'}^{x''}\frac{\sin u(x_h-x)}{x_h-x}\,dx=2\int_{u(x_h-x'')}^{u(x_h-x')}\frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Prin urmare, dacă x' şi x'' sînt diferite de x_h, avem:

$$\lim_{u\to\infty} J_{h,u} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x_h \text{ este situat în afara intervalului } x', x'', \\ 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = 2\pi, \text{ dacă } x' < x_h < x''. \end{cases}$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_h p_h J_{h,u} = \sum_{x'<x_h<x''} p_h = F(x'') - F(x'), \qquad (2)$$

ceea ce exprimă egalitatea (1).

O variabilă oarecare $f(\xi)$, care nu este funcţie simplă, este limita uniformă a unui şir de funcţii simple $f_n(\xi)$; dacă $\varphi_n(u)$ şi $F_n(x)$ sînt respectiv funcţia caracteristică şi funcţia de repartiţie corespunzătoare pentru fiecare dintre aceste perechi, avem relaţia (1) ori de cîte ori x', x'' nu sînt valori de discontinuitate ale lui $F_n(x)$.

Presupunem că x', x'' nu sînt puncte de discontinuitate pentru $F_n(x)$ oricare ar fi n suficient de mare, şi nici pentru $F(x) = \lim F_n(x)$. In aceste condiţii, fiecare dintre cei doi membri ai egalităţii

$$F_n(x'') - F_n(x') = \frac{1}{2\pi} \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \varphi_n(u) \frac{e^{-iux''} - e^{-iux'}}{-iu}\, du$$

are o limită determinată, cînd n tinde către infinit. Rezultă că aceste două limite sînt egale. Rezultă teorema (1).

Teorema de inversiune (1) arată că variaţiile funcţiei $F(x)$ sînt determinate. Cum presupunem $F(-\infty) = 0$, funcţia însăşi este unic determinată.

§ 6. Tipuri de repartiţii cu întrebuinţare curentă

1. *Repartiţia normală sau gaussiană* este o repartiţie continuă, pe întreaga axă Ox:

$$\rho(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2} \qquad (h>0), \qquad (1)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(u)\, du.$$

Se constată imediat că $F(-\infty)=0$ și

$$F(+\infty)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2(u-a)^2}\,du=1,$$

ținînd seamă că

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2}\,dv=\sqrt{\pi}.$$

Prin definiție, funcția caracteristică este dată de integrala:

$$\varphi(t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}\,e^{-h^2(u-a)^2}\,du,$$

adică

$$\varphi(t)=e^{ita-\frac{1}{4h^2}t^2}. \tag{2}$$

Aceste funcții depind de doi parametri a și h. Semnificația acestor parametri se obține calculînd momentele de primele două ordine:

$$m_1=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-h^2(u-a)^2}\,du.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $v=u-a$ și efectuînd integrarea, obținem:

$$m_1=a;$$

a este deci centrul repartiției, care este simetrică față de acest punct. Mutînd originea în acest centru, vom obține, dacă notăm noua abscisă tot cu x,

$$\rho(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \tag{3}$$

și evident

$$\varphi(t)=e^{-\frac{1}{4h^2}t^2}. \tag{4}$$

Varianța acestei repartiții este

$$\nu=\mu^2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-h^2u^2}\,du=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h^2u^2e^{-h^2u^2}\,dhu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd integrala din membrul al doilea, după o integrare prin părți, găsim:

$$\mu^2 = \frac{1}{2h^2}. \tag{5}$$

Constanta pozitivă h se numește *coeficientul de precizie al repartiției*. Inlocuind această constantă prin μ, cu ajutorul relației (5), găsim pentru repartiția gaussiană generală, raportată la valoarea medie

$$\rho(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}}, \quad \varphi(t) = e^{-\frac{\mu^2}{2}t^2},$$

expresii care sînt în deobște întrebuințate, iar pentru variabila redusă,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \Phi(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(u)\, du.$$

2. *Momentele de diferite ordine ale repartiției normale.* Dacă folosim relația (2), obținem momentele de diferite ordine ale abaterii, dezvoltînd în serie funcția caracteristică $\varphi(t)$ dată de această relație:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{2k}}{2^k k!} t^{2k}. \tag{6}$$

Momentele sînt prin urmare

$$M_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$M_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \mu^{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)\mu^{2k}.$$

Aceste expresii ale momentelor determină la rîndul lor funcția caracteristică dată de relația (2), deci repartiția gaussiană cu varianța μ^2.

3. *O repartiție de forma*

$$\rho(x) = Ae^{ax^2+bx+c},$$

pentru întreaga axă Ox, este în mod necesar de forma (1). In adevăr, ea trebuie să fie finită pentru orice x, prin urmare $a = -h^2$ (h real); pe de altă parte, $-h^2x^2 + bx + c = -\left(hx - \frac{b}{2h}\right)^2 + \frac{b^2}{4h^2} + c$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci,

$$\rho(x) = Be^{-h^2\left(x-\frac{b}{2h}\right)^2}$$

şi, cum trebuie să avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1,$$

rezultă

$$B = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

Mediana acestei distribuţii simetrice este evident $\alpha = 0$.

Cvartilele sînt $\alpha_1 = -0{,}6\ldots$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0{,}6\ldots$ Ele se găsesc în tabela valorilor funcţiei $\Phi(x)$ şi corespund valorilor $\Phi(x) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\xi}{4}$.

4. *Distribuţia $x = \xi^2$ cînd ξ urmează legea normală redusă.* Deoarece

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \text{deci} \quad dF(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi,$$

vom avea, în acelaşi timp,

$$dF(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} dx;$$

prin urmare funcţia de repartiţie pentru x va fi

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}},$$

x avînd valori pe semiaxa pozitivă $x > 0$.

Funcţia caracteristică corespunzătoare este

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}.$$

5. *Distribuţia exponenţială.* Valorile variabilei x se găsesc pe semiaxa reală $x > 0$:

$$\rho(x) = Ae^{-ax} \qquad a > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția

$$\int_0^\infty \rho(x)\,dx = A\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = 1$$

ne dă $A=a$.

$$\varphi(t) = a\int_0^\infty e^{itx}e^{-ax}\,dx = \frac{a}{a-it}\,n.$$

Deoarece pentru $|t|<a$ avem

$$\varphi(t) = 1+\frac{it}{a}-\frac{t^2}{a^2}+\ldots,$$

rezultă

$$M_1=\frac{1}{a},\quad M_2=\frac{2}{a^2},\quad \nu=\frac{1}{a^2}=M_2-M_1^2.$$

§ 7. Distribuții discontinue simple

1. *Distribuția* $u(x)$. Corespondența între o valoare $x=a$ și o masă egală cu 1 corespunde funcției de repartiție

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ pentru } x<a, \\ 1 \text{ pentru } x\geq a, \end{cases} \tag{1}$$

funcția caracteristică respectivă fiind deci

$$\varphi(t)=e^{ita}, \tag{2}$$

Termenul de distribuție este în acest caz *impropriu;* el poate fi însă întrebuințat pentru a-l cuprinde în generalitatea celorlalte cazuri, deoarece poate interveni ca limită a unor distribuții *propriu-zise.*

2. *Distribuția urnei elementare.* Considerăm *două valori* pe care le putem reduce la 0 și 1.

Masa punctului 0 este p, masa punctului 1 este q.

Presupunem $p,\ q>0,\quad p+q=1$:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ pentru } x<0, \\ p \text{ pentru } 0\leqq x<1, \\ p+q=1 \text{ pentru } 1\leqq x, \end{cases}$$

$$\varphi(t)=pe^{it}+q \quad (p+q=1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\varphi(t)=1+\frac{pi}{1}t-\frac{p}{2!}t^2+\ldots,$$

vom avea:

$$M_1=p;\quad M_2=p.$$

Prin urmare, avem pentru varianţă

$$\nu=\mu^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Distribuţia abaterilor urnei elementare are ca funcţie caracteristică

$$\varphi(t)=pe^{iqt}+qe^{-ipt}.$$

Distribuţia redusă a urnei elementare are ca valori

$$\frac{-p}{\sqrt{pq}},\quad \frac{q}{\sqrt{pq}},$$

iar ca funcţie caracteristică

$$\varphi_1(t)=\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{pq}}\right).$$

3. *Distribuţia binomială sau urna lui Bernoulli.* Să considerăm o repartiţie dată prin funcţia caracteristică

$$\varphi_n(t)=(pe^{it}+q)^n.$$

Să verificăm mai întîi că $\varphi_n(t)$ reprezintă cu adevărat o funcţie caracteristică. Dezvoltînd după regula binomului, avem:

$$\varphi_n(t)=\sum_0^n C_n^l q^l p^{n-l} e^{ilt}.$$

Expresia din membrul al doilea ne arată că $\varphi_n(t)$ este funcţia caracteristică a distribuţiei constituită din $n+1$ valori: $x=l=0, 1, 2, \ldots, n$, cu masele respective $C_n^l q^l p^{n-l}$ $(l=0, 1, 2, \ldots, n)$, suma acestor mase fiind 1:

$$\sum_0^n C_n^l q^l p^{n-l}=(q+p)^n=1.$$

Vom avea, deci, pentru funcţia de repartiţie:

$$F_n(x)=\sum_{l<x} C_n^l q^l p^{n-l}. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltînd $\varphi_n(t)$ în serie după puterile lui t, obţinem:

$$\varphi_n(t)=1+\frac{inp}{1}t-\frac{p^2n^2+qpn}{2!}t^2+\dots$$

Prin urmare,

$$M_1=np,\quad M_2=p^2n^2+pqn,$$

de unde *valoarea varianţei*:

$$\nu_n=npq$$

şi *abaterea medie pătratică*:

$$\mu_n=\sqrt{npq}.$$

Funcţia caracteristică a distribuţiei reduse a urnei lui Bernoulli va fi deci

$$\varphi_n(t)=e^{-i\frac{np}{\sqrt{npq}}t}\left(pe^{i\frac{t}{\sqrt{npq}}}+q\right)^n \tag{4}$$

sau încă

$$\varphi_n(t)=\left(pe^{i\frac{qt}{\sqrt{npq}}}+qe^{-i\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)^n.$$

Funcţia de repartiţie corespunzătoare, ţinînd seamă de expresia variabilei reduse

$$\xi=\frac{x-np}{\sqrt{npq}},$$

şi de

$$\Phi_n(\xi)=F_n(x),$$

este

$$\Phi_n(\xi)=F_n(x)=\sum_{\lambda<\xi}C_n^{np+\lambda\sqrt{npq}}\,q^{np+\lambda\sqrt{npq}}\,p^{nq-\lambda\sqrt{npq}}, \tag{5}$$

unde $\lambda=\frac{l-np}{\sqrt{npq}}$, iar l are toate valorile mai mici decît x.

4. *Distribuţia limită a urnei reduse a lui Bernoulli.* Dacă dezvoltăm în serie paranteza din membrul al doilea din (4), găsim

$$\varphi_n(t)=\left(1-\frac{i}{2n}t^2+\frac{ipq(p-q)}{(\sqrt{npq})^3}\frac{t^3}{3!}+\frac{en(p,q)}{(\sqrt{npq})^4}\frac{t^4}{4!}+\dots\right)^n,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, cînd $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{6}$$

convergența fiind uniformă.

Potrivit relației (5), § 6, putem afirma că

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\xi) = \Phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Distribuția redusă-limită a distribuției lui Bernoulli este cea gaussiană.

5. *Distribuția lui Poisson.* In distribuțiile binomiale, considerate mai sus, p și q rămîn constante cînd n variază.

Dacă presupunem că aceste elemente variază cu n și, mai precis, dacă

$$p = \frac{a}{n},$$

a fiind o constantă pozitivă, atunci

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{a}{n} e^{it} + 1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}(e^{it} - 1)\right)^n.$$

Cînd $n \to \infty$, vom avea, *uniform*:

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{a(e^{it}-1)}$$

sau încă, dezvoltînd în serie membrul al doilea:

$$\varphi(t) = e^{-a} \sum_0^\infty {}_l \frac{a^l}{l!} e^{ilt}.$$

Deci, funcția caracteristică limită este funcția caracteristică a următoarei repartiții:

Valori: 0, 1, 2, ..., n, ...

masele corespunzătoare:

$$p_l = e^{-a} \frac{a^l}{l!}.$$

Aceasta este *repartiția lui Poisson.*

Pentru $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, obținem:

$$\varphi'(t) = iae^{a(e^{it}-1)} e^{it},$$
$$\varphi''(t) = -ae^{a(e^{it}-1)}(e^{2it} + e^{it}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare,

$$\varphi'(0)=ia,$$
$$\varphi''(0)=-2a.$$

Vom avea deci pentru primele două valori medii

$$M_1=a, \qquad M_2=a.$$

Parametrul a, care figurează în repartiția lui Poisson, este valoarea medie.

6. *Variabile aleatorii cu valori întregi.* Pentru Mecanica cuantică prezintă un interes deosebit variabilele aleatorii cu un număr finit sau cu o infinitate numărabilă de valori întregi.

Să considerăm un cîmp de probabilitate $\{E, K, P\}$ și un șir $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ de evenimente din K, astfel că

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j=E, \quad A_j \bigcap_{j\neq k} A_k=\Phi.$$

Fie $x=f(\xi)$ o variabilă aleatorie pentru care avem:

$$f(\xi)=j, \quad \xi\in A_j, \qquad j=0, 1, 2, \ldots$$

și în același timp

$$P(A_j)=p_j, \qquad j=0, 1, 2, \ldots,$$

satisfăcînd condițiile

$$p_j\geq 0, \quad \sum_j p_j=1.$$

Vom considera separat evenimentele $A_{j_0}, A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}, \ldots$, ale căror probabilități p_j sînt diferite de zero. Valorile respective $j_0, j_1, \ldots, j_l, \ldots$ ale variabilei aleatorii se pot scrie sub forma canonică

$$j_l=\alpha+l\delta \qquad l=0, 1, 2, \ldots,$$

unde $\alpha=j_0$, iar δ este cel mai mare divizor comun al diferențelor j_l-j_m, numit *pasul variabilei* $f(\xi)$. Vom nota, în cele ce urmează,

$$q_l=p_{j_l}.$$

Funcția caracteristică a variabilei $f(\xi)$ este, potrivit definiției,

$$\varphi(u)=\sum_{l=0, 1, \ldots} q_l e^{i(\alpha+l\delta)u}=e^{i\alpha u}\sum q_l e^{il\delta u}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că *funcţia* $e^{-ia\,u}\,\varphi(u)$ *este periodică*, cu perioada $\frac{2\pi}{\delta}$.

Prin urmare, $|\varphi(u)|$ este de asemenea periodică, cu perioada $\frac{2\pi}{\delta}$. Vom avea deci

$$|\varphi(0)| = \left|\varphi\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)\right| = 1.$$

Se demonstrează imediat că $|\varphi(u)|$ *nu atinge valoarea* 1 *pentru nici un punct n intermediar între* 0 *şi* $\frac{2\pi}{\delta}$.

Se verifică, de asemenea, imediat următoarea formulă de inversiune:

$$q_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\delta}}^{+\frac{\pi}{\delta}} e^{-i\,(a+l\delta)\,a}\,\varphi(u)\,du. \tag{8}$$

Nu avem decît să înlocuim pe $\varphi(u)$ prin seria absoiut convergentă (7).

7. *Variabile aleatorii vectoriale cu coordonate întregi.* Să considerăm N variabile aleatorii $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi), \ldots x_N = f_N(\xi)$, definite pe acelaşi cîmp de probabilitate, toate cu *valori întregi*.

Vectorului $M(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ îi corespund diferitele puncte cu coordonate întregi pozitive din spaţiul euclidian cu N dimensiuni, în care am ales un reper cartezian. Notăm:

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_N} = P(x_1 = j_1,\ x_2 = j_2, \ldots, x_N = j_N)$$

şi vom reţine acele puncte pentru care $p_{j_1, j_2, \ldots, j_N} \neq 0$. Aceste puncte sînt vîrfurile unei reţele de prisme ale căror coordonate se reprezintă sub forma canonică

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{N} l_i \delta_{ik} \qquad (l_i = 0,\ 1,\ 2, \ldots;\ i,\ k = 1,\ 2, \ldots, N).$$

Reţeaua este *maximală* dacă determinantul $\delta = |\delta_{ik}|$ are valoarea maximă, în sensul că, dintre toate reţelele de prisme ale căror vîrfuri cuprind punctele pentru care $p_{j_1, j_2, \ldots, j_N} \neq 0$, alegem pe aceea pentru care determinantul δ are valoarea absolută maximă.

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune că rețeaua este maximală.

Este evident că, dacă $\delta=0$, sistemul este degenerat și anume are mai puțin de N dimensiuni; variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_N$ nu sînt independente.

Pentru cele ce urmează ne vom limita la două dimensiuni.

Funcția caracteristică a vectorului aleator $M(x_1, x_2)$, cu reprezentarea canonică maximală

$$x_1=\alpha_1+\delta_{11}l_1+\delta_{12}l_2,$$

$$x_2=\alpha_2+\delta_{21}l_1+\delta_{22}l_2,$$

$$l_1,\ l_2=0,\ 1,\ldots,\ \delta=\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}\delta_{21}>0,$$

este

$$\varphi(u_1,\ u_2)=\sum_{l_1,\ l_2=0,\ 1,\ 2,\ldots} q_{l_1l_2}e^{i\,[u_1(\alpha_1+\delta_{11}l_1+\delta_{12}l_2)+u_2(\alpha_2+\delta_{21}l_1+\delta_{22}l_2)]}, \qquad (9)$$

iar formula de inversiune dă

$$q_{l_1l_2}=\frac{\delta}{4\pi^2}\int_D e^{-i\,[u_1(\alpha_1+\delta_{11}l_1+\delta_{12}l_2)+u_2(u_2+\delta_{21}l_1+l_{12}l_2)]}\varphi(u_1,\ u_2)\,du_1du_2, \qquad (10)$$

unde domeniul D este paralelogramul de arie $\frac{4\pi^2}{\delta}$, definit prin inegalitățile

$$-\pi\leq\delta_{11}u_1+\delta_{21}u_2\leq\pi,$$

$$-\pi\leq\delta_{12}u_1+\delta_{22}u_2\leq\pi.$$

Formula (10) se verifică imediat înlocuind pe $\varphi(u_1, u_2)$ prin seria (9).

Se demonstrează și pentru funcțiile caracteristice $\varphi(u_1, u_2)$ că $|\varphi(u_1, u_2)|<1$ în paralelogramul D, cu excepția punctului $u_1=0$, $u_2=0$, unde avem $\varphi(0, 0)=1$.

Observație. Este ușor de văzut că toate considerațiile precedente se extind și la cazul în care valorile variabilei pot fi *întregi pozitivi și negativi.*

§ 8. Alte repartiții

1. *O repartiție legată de funcția* $\Gamma(x)$. Să considerăm funcția $\Gamma(x)$ definită, după cum se știe, pentru $x>0$ prin integrala

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această funcție pozitivă este continuă și admite derivate finite de toate ordinele:

$$\Gamma^{(s)}(x)=\int_0^{\infty} u^{x-1}(\ln u)^s e^{-u}\,du.$$

Efectuînd o integrare parțială în (1), obținem relația de recurență cunoscută

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x).$$

Dacă x este un întreg, $x=n$, această relație ne dă imediat

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Dată fiind forma ei, transformăm funcția $\Gamma(x)$ într-o funcție caracteristică. Facem mai întîi o schimbare de variabilă sub integrală, punînd $u=\alpha v$ $(\alpha>0)$:

$$\Gamma(x)=\alpha^x\int_0^{\infty} v^{x-1}e^{-\alpha v}\,dv.$$

In membrul al doilea al acestei egalități, x este un parametru real pozitiv. Membrul al doilea este independent de α.

Dacă x este fix și α variază, α^x este o funcție analitică atîta vreme cît $\alpha\neq 0$. Același lucru și cu integrala. Fiecare dintre aceste funcții analitice uniforme se pot prelungi și pentru valori complexe ale lui α, dacă partea reală a lui α rămîne pozitivă. Relația dintre ele se menține. Vom pune $\alpha=\beta-it$; unde t este un parametru real, iar β are o valoare determinată *pozitivă*.

Relația (1) se va putea scrie:

$$\int_0^{\infty} v^{x-1}e^{-\beta v}e^{itv}\,dv=\frac{\Gamma(x)}{(\beta-it)^x}.$$

Dacă punem

$$\rho(v)=\frac{\beta^x}{\Gamma(x)}v^{x-1}e^{-\beta x}\quad\text{pentru}\quad v>0, \tag{2}$$

această funcție poate fi considerată ca densitate de repartiție pe semiaxa pozitivă, deoarece este pozitivă, integrabilă și potrivit cu (2)

$$\int_0^{\infty}\rho(v)\,dv=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia ei caracteristică va fi, ţinînd seama de (2),

$$f(t)=\frac{\beta^x}{\Gamma(x)}\int_0^\infty v^{x-1}e^{-\beta v}e^{itv}=\frac{\beta^x}{(\beta-it)^x}$$

sau încă

$$f(t)=\frac{1}{\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^x}\qquad(\beta>0).$$

Această repartiţie depinde de doi parametri reali pozitivi x şi β.

2. *O repartiţie pe segmentul finit* 0,1. Această repartiţie este legată de funcţia Beta definită, după cum se ştie, pentru parametrii pozitivi x şi y, prin integrala

$$B(x,y)=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du. \tag{3}$$

Această funcţie este legată de $\Gamma(x)$ prin relaţia bine cunoscută

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Dacă punem

$$\rho(u;x,y)=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\,u^{x-1}(1-u)^{y-1},$$

găsim o densitate de repartiţie a variabilei u, cu doi parametri x şi y cu masa totală 1, aşa cum arată relaţia (3), în intervalul 0,1.

Funcţia caracteristică a repartiţiei Beta definită de (3) este

$$f(t;x,y)=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\int_0^1 e^{itu}u^{x-1}(1-u)^{y-1}du.$$

Dezvoltînd membrul al doilea în serie, găsim:

$$f(t;x,y)=\sum_0^n{}_n\frac{B(x+n,y)}{B(x,y)}\cdot\frac{i^n t^n}{n!},$$

de unde se vede că

$$M_1=\frac{B(x+1,y)}{B(x,y)},\quad M_2=\frac{B(x+2,y)}{B(x,y)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. *Distribuţia lui Laplace şi Cauchy.* Dacă luăm ca densitate a unei distribuţii pe întreaga axă Ox

$$\rho(x)=\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x-b|}{a}} \qquad (a>0),$$

observăm imediat că

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{|x-b|}{a}}dx=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{b}e^{-\frac{|x-b|}{a}}dx+\frac{1}{2a}\int_{b}^{\infty}e^{-\frac{x-b}{a}}dx=$$

$$=\frac{1}{a}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{x}{a}}dx,$$

iar pentru funcţia caracteristică avem:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{b}e^{itx}e^{-\frac{|x-b|}{a}}dx+\frac{1}{2a}\int_{b}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{x-b}{a}}dx,$$

de unde rezultă imediat

$$\varphi(t)=\frac{e^{ibt}}{1+a^2t^2}.$$

Această repartiţie are momente finite de orice ordin. Găsim:

$$M_1=b, \quad M_2=b^2+2a, \quad \nu=2a, \quad \mu=a\sqrt{2}.$$

Dacă luăm originea axei în b, obţinem:

$$\rho(x)=\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad \varphi(t)=\frac{1}{1+a^2t^2},$$

$$e^{-\frac{|x|}{a}}=\frac{a}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1+a^2t^2}dt.$$

Prin urmare, pentru $x=0$ avem:

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+a^2t^2}=1.$$

Putem deci acum lua o densitate

$$\rho_c(x)=\frac{a}{\pi}\frac{1}{1+a^2x^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce ne va da o funcție caracteristică

$$f_c(t) = e^{-\frac{|t|}{a}},$$

cunoscută sub numele lui *Cauchy*.

Este evident, după forma ei, că nici un *moment* al acestei repartiții nu este finit.

§ 9. Repartiții cu două dimensiuni *)

1. *Funcția de repartiție.* Considerăm o masă materială egală cu unitatea, răspîndită pe întregul plan x, y sau numai pe un domeniu D al acestui plan.

Notăm cu $F(x, y)$ masa totală a punctelor de coordonate ξ, η, pentru care $\xi < x$, $\eta < y$; $F(x, y)$ *este funcția de repartiție.*

Dreptunghiul determinat prin inegalitățile

$$x_1 \leqq \xi < x_2, \quad y_1 \leqq \eta < y_2$$

cuprinde o masă egală cu

$$\Delta F = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1).$$

Prin urmare, totdeauna

$$\Delta F \geqq 0.$$

Un dreptunghi elementar determinat prin

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + dx, \quad y_1 = y, \quad y_2 = y + dy$$

cuprinde masa elementară, care cu notațiile obișnuite se scrie

$$dF = F(x+dx, y+dy) - F(x, y+dy) + F(x, y) - F(x+dx, y),$$

sau încă

$$dF = F(x+dx, y+dy) - F(x, y+dy) - [F(x+dx, y) - F(x, y)].$$

Vom avea atunci pentru masa repartizată într-un domeniu al planului

$$P_\Delta = \iint_\Delta dF(x, y).$$

Dacă Δ coincide cu întreg domeniul D de răspîndire a masei,

$$P_D = \iint_D dF(x, y) = 1.$$

---

*) Pentru detalii privind acest paragraf a se vedea în special H. Crömer, Mathematical methods of Statistics, 1946.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Densitatea de repartiție.* In cazul unei distribuții continue și dacă $F(x, y)$ are o derivată de ordinul al doilea bine determinată în fiecare punct, vom avea, după cum se constată mediat, înlocuind sub integrală pe dF prin

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy.$$

Funcția pozitivă

$$\rho(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$$

este *densitatea de repartiție a maselor considerate.*

3. *Repartiția marginală.* Dacă notăm cu $\Phi(x)$ masa totală corespunzătoare punctelor de abscisă mai mică decît x, $\Phi(x)$ este funcția de *repartiție marginală relativă* la x. Vom avea, în același mod, o funcție $\psi(y)$ de repartiție marginală relativă la y.

Dacă există o densitate de repartiție, atunci

$$\rho_1(x) = \int_y F(x, y)\, dy$$

este densitatea de repartiție marginală față de x.

La fel

$$\rho_2(y) = \int_y F(x, y)\, dx$$

este *densitatea de repartiție marginală față de y.*

Dacă masa este extinsă pe întregul plan, atunci

$$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\, dy,$$

$$\rho_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\, dx.$$

Presupunînd că $\rho(x, y) = \rho'(x)\, \rho''(y)$, avem:

$$\rho_1(x) = a_1 \rho'(x); \quad \rho_2(y) = a_2 \rho''(y);$$

prin urmare,

$$\rho(x, y) = \frac{1}{a_1 a_2} \rho_1(x)\, \rho_2(y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{1}{a_1a_2}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_1(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\rho_2(y)\,dy,$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_2(y)\,dy=1;$$

deci $a_1a_2=1$ și, prin urmare,

$$\rho(x,\ y)=\rho_1(x)\,\rho_2(y).$$

Această condiție nu este suficientă pentru ca cele două variabile x și y să poată fi considerate ca repartiții independente. In adevăr, dacă masa nu este repartizată în tot planul ci numai într-un domeniu D, mărginit de o curbă simplă $\varphi(x,\ y)=0$, determinat prin inegalitatea $\varphi(x,\ y)<0$, atunci

$$\rho_1(x)=\rho'(x)\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\rho''(y)\,dy,$$

unde $y_1(x)$, $y_2(x)$ sînt valorile lui y care corespund celor două puncte (presupunem cazul simplu în care sînt numai două) în care dreapta perpendiculară pe Ox, în punctul de abscisă x, întîlnește curba $\varphi(x,\ y)=0$. Vom avea deci, în general,

$$\rho_1(x)=\rho'(x)\,r'(x).$$

Tot așa vom găsi:

$$\rho_2(y)=\rho''(y)\,r''(y).$$

Este atunci evident că

$$\rho_1(x)\,\rho_2(y)=\rho(x,\ y)\,r'(x)\,r''(y)$$

și deci $\rho_1(x)\,\rho_2(y)=\rho(x,\ y)$ numai în cazul particular în care $r'(x)=ct$, $r''(y)=ct$, ceea ce se întîmplă, de exemplu, dacă D este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate.

4. *Valori medii.* Dacă $\varphi(x,\ y)$ este o funcție integrabilă în D, cu măsura $dF(x,\ y)$, integrala

$$M(\varphi(x,\ y))=M_\varphi=\iint_D\varphi(x,\ y)\,dF(x,\ y)$$

este, prin definiție, valoarea medie a funcției φ față de repartiția $F(x,\ y)$.

Scanned with OKEN Scanner

In particular, deci, $\varphi(x, y)=x^h y^k$, h și k fiind întregi pozitivi sau nuli. Vom nota

$$M[x^h y^k]=m_{h,k},$$

prin urmare

$$m_{h,k}=\iint_D x^h y^k\, dF(x, y),$$

ori de cîte ori integrala din membrul al doilea există. In acest caz, $m_{h,k}$ este momentul de ordinul h, k al repartiției.

In particular,

$$m_{10}=\iint_D x\, dF(x, y)$$

dacă integrala din membrul al doilea există. Această repartiție se mai poate scrie, presupunînd că există densitate, sub forma

$$m_{10}=\int_{y_y} dy \int_{y_x} x\rho(x, y)\, dx=\int_{y_x} x\, dx \int_{y_y} \rho(x, y)\, dy=\int x\rho_1(x)\, dx.$$

Prin urmare, m_{10} *este media repartiției marginale* a cărei funcție de frecvență este $\rho_1(x)$.

5. *Repartiții condiționate. O problemă de minim. Se caută în mulțimea funcțiilor regulate $f(x)$ pentru care integrala*

$$I=\iint_D [y-f(x)]^2 \rho(x, y)\, dx\, dy$$

există, acea funcție care face integrala I minimă.

Această problemă generalizează pe cea corespunzătoare pentru o singură variabilă. Se știe, în adevăr, că

$$\int_\gamma (x-a)^2 \rho(x)\, dx$$

este minimă pentru

$$a=\int_\delta x\rho(x)\, dx=m_1,$$

așa cum se poate verifica imediat.

In cazul nostru va trebui ca

$$\delta I=-2\iint_D [y-f(x)]\rho(x, y)\,\delta f(x)\, dx\, dy=0,$$

ori care ar fi $\delta f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Integrala din membrul al doilea se mai poate scrie

$$\int_{y_x} \delta f(x)\, \delta x \int_{y_y} [y - f(x)]\, \rho(x, y)\, dy.$$

Condiția necesară și suficientă ca această integrală să fie nulă este ca

$$\int_{y_y} |y - f(x)|\, \rho(x, y)\, dy = 0,$$

deci

$$f(x) = \frac{\int_{y_y} y\rho(x, y)\, dy}{\int_{y_y} \rho(x, y)\, dy}.$$

Funcția $f(x)$ se prezintă ca o valoare medie a lui y, pentru un x dat $x = x$, anume o repartiție care are o densitate

$$\rho(y \mid x) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_1(x)}.$$

Această egalitate se mai poate scrie:

$$\rho(y \mid x)\, dy = \frac{\rho(x, y)\, dx\, dy}{\rho_1(x)\, dx}$$

sau, folosind funcțiile de repartiție corespunzătoare,

$$dF(y \mid x)\, dF_1(x) = dF(x, y).$$

Vom numi funcția $F(y \mid x)$ *repartiția condiționată a lui* y *față de* x; $F_1(x)$ este repartiția marginală a lui x.

Prin urmare, $\rho(y \mid x)$ este densitatea de repartiție condiționată a lui y față de x.

Dar atunci $f(x)$ se poate scrie

$$f(x) = \int_{y_y} y\rho(y \mid x)\, dy.$$

Funcția care realizează minimul integralei I este *media condiționată a lui* y *față de* x. Vom pune:

$$m_1(x) = \int_{y_y} y\rho(y \mid x)\, dy.$$

Scanned with OKEN Scanner

In același mod, vom defini repartiția $F(x \mid y)$ condiționată a lui x față de y, dacă este cazul densitatea de repartiție condiționată $\rho(x \mid y)$ și, prin urmare, media condiționată

$$m_2(y) = \int_{y_x} x\rho(x, y)\, dx.$$

6. *Curbele de regresiune de tipul* 1. Curbele

$$y = m_1(x) \quad \text{și} \quad x = m_2(y)$$

sînt cele două *curbe de regresiune* ale repartiției cu două variabile $F(x, y)$.

Regresiunea este liniară dacă funcția $m_1(x)$ sau funcția $m_2(y)$ este liniară.

Funcțiile $m_1(x)$ și $m_2(y)$ dau o bună indicație asupra legăturilor dintre valorile celor două variabile.

Să considerăm *cazul particular în care toată masa este repartizată pe o curbă* $y = h(x)$.

In acest caz, funcția de repartiție marginală a lui x față de y este:

$$dF[x, h(x)]\, d_x F(y, x) = dF(x, y).$$

Funcția de repartiție condiționată este dată de relația:

$$d_x F(y \mid x) = \frac{dF(x, y)}{dF[x, h(x)]},$$

iar media condiționată va fi:

$$m_1(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\, dF(x, y)}{dF[x, h(x)]} = \frac{h(x)\, dF[x, h(x)]}{dF[x, h(x)]} = h(x).$$

Prin urmare, *curba de regresiune este chiar curba pe care se găsește distribuția.*

Cealaltă curbă de regresiune este identică cu aceasta. Se găsește efectuînd aceleași operații: $x = h^{-1}(y)$.

Al doilea caz particular, în care între x și y nu este nici o legătură, deci:

$$\rho(x, y) = \rho_1(x)\, \rho_2(y),$$

ne dă următorul rezultat:

$$\rho(y \mid x) = \rho_2(y); \quad \rho(x \mid y) = \rho_1(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$m_1(x)=\int x\rho_1(x)\,dx=m_1=\text{const},$$

$$m_2(y)=\int y\rho_2(y)\,dy=m_2=\text{const}.$$

Cele două curbe de regresiune sînt dreptele $y=m_1$, $x=m_2$, perpendiculare una pe alta.

Intre aceste două cazuri, în care curbele se confundă dacă $y=h(x)$, sau sînt drepte perpendiculare una pe alta, avem cazurile intermediare în care între x şi y există o *dependenţă statistică*.

7. *Curbe de regresiune de tipul* 2. Am obţinut curbele de regresiune de tipul 1 căutînd minimul integralei I în cîmpul tuturor funcţiilor regulate $f(x)$.

Vom căuta acest minim în cîmpuri mai restrînse şi anume în acela al funcţiilor parabolice

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

alegînd un n suficient de mare pentru ca aproximaţia să fie cît mai bună. Urmează deci să determinăm parametrii $a_0, a_1,\ldots,a_n$ pentru care

$$I=\iint_D[y-(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)]^2\rho(x,\ y)\,dx\,dy$$

să fie minimă.

Avem pentru aceasta ecuaţiile

$$\frac{\partial y}{\partial a_i}=0 \qquad (i=0,\ 1,\ldots,n)$$

sau

$$\iint_D(a_0x^s+a_1x^{1+1}+\ldots+a_nx^{s+n})\rho(x,\ y)\,dx\,dy=\iint_D yx^s\rho(x,\ y)\,dx\,dy,$$
$$(s=0,\ 1,\ldots,n)$$

sau încă, dezvoltat,

$$\left.\begin{aligned}
&m_{00}a_0+m_{10}a_1 &&+\ldots+m_{n0}a_n &&=m_{01}\\
&m_{10}a_0+m_{20}a_1 &&+\ldots+m_{n+1,0}a_n &&=m_{11}\\
&m_{20}a_0+m_{30}a_1 &&+\ldots+m_{n+2,0}a_n &&=m_{21}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m_{n0}a_0+m_{n+1,0}a_1 &&+\ldots+m_{2n,0}a_n &&=m_{n1}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

unde

$$m_{k0}=\iint_D x^k \rho(x,\ y)\,dx\,dy;\quad m_{k1}=\iint_D x^k y\rho(x,\ y)\,dy.$$

Observăm că

$$m_{k0}=\int_{y_x} x^k \rho_1(x)\,dx=m'_k, \tag{2}$$

$\rho_1(x)$ fiind densitatea de repartiţie marginală a lui x. Prin urmare, coeficienţii necunoscutelor din sistemul precedent sînt momentele repartiţiei marginale a lui x. Vom scrie ecuaţiile sub forma

$$\left.\begin{aligned} &m'_0 a_0+m'_1 a_1 \quad +\ldots+m'_n a_n \quad =m_{01}\\ &m'_1 a_0+m'_2 a_1 \quad +\ldots+m'_{n+1} a_n=m_{11}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &m'_n a_0+m'_{n+1} a_1+\ldots+m'_{2n}\ a_n=m_{n1} \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Pentru a arăta că $a_0,\ a_1,\ldots,a_n$ au valori determinate şi unice, este necesar şi suficient ca determinantul

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} m'_0 & m'_1 & \ldots m'_n\\ m'_1 & m'_2 & \ldots m'_{n+1}\\ \vdots & & \\ m'_n & m'_{n+1} & \ldots m'_{2n} \end{vmatrix}$$

să fie diferit de zero.

Acest fapt a fost stabilit de Cebîşev cu prilejul studiilor sale asupra problemei momentelor.

Să ne propunem, cu Cebîşev, să determinăm n puncte $x_0,\ x_1,\ldots,x_n$ şi n mase $p_0,\ p_1,\ldots,p_n$, astfel ca

$$m'_k=\sum_0^n{}_i\, p_i x_i^k \qquad k=0,\ 1,\ldots,2n. \tag{3}$$

Presupunem, în prealabil, că masele date în problema iniţială sînt numeroase şi că, chiar pentru repartiţia marginală, există întotdeauna mai mult de n puncte, dacă repartiţia este discontinuă.

Fie $f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n+\alpha_{n+1}x^{n+1}$ polinomul care admite ca rădăcini $x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n$. Acest polinom se poate scrie, în afară de un factor constant, sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n+1} \\ m'_0 & m'_1 & m'_2 & \dots & m'_{n+1} \\ \vdots & & & & \\ m'_n & m'_{n+1} & m'_{n+2} & \dots & m'_{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Coeficientul lui x^{n+1} este Δ_n. Demonstrăm că $\Delta_n \neq 0$ dacă demonstrăm că ecuația precedentă este de gradul $n+1$ efectiv și reciproc.

Presupunem că $\Delta_n = 0$, dar că $\Delta_{n-1} \neq 0$. Notăm cu $f_{n-1}(x)$ minorul momentului m'_{2n+1} din determinantul considerat:

$$f_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots x^n \\ m'_0 & m'_1 & m'_2 & \dots m'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ m'_{n-1} & m'_n & m'_{n+1} & \dots m'_{2n} \end{vmatrix}.$$

Ținînd seama de (2), se verifică imediat că

$$\int_{y'_x} f(x)\, x^k \rho_1(x)\, dx = 0$$

pentru $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Dar atunci

$$\int_{y'_x} f^2_{n-1}(x)\, \rho_1(x)\, dx = 0,$$

ceea ce înseamnă că $f_{n-1}(x) = 0$ pentru cel puțin n puncte. Ipoteza noastră este absurdă, deci $\Delta_n \neq 0$; sistemul (3) are o soluție unică bine determinată.

Există deci un polinom $f(x)$ de gradul n și numai unul singur care face minimă pe I. Funcția

$$y = f(x)$$

este o curbă de regresiune parabolică a lui x față cu y.

In special sînt interesante dreptele de regresiune. In acest caz,

$$f(x) = a_0 + a_1 x,$$

iar sistemul (1) devine

$$m'_0 a_0 + m'_1 a_1 = m_{01},$$

$$m'_1 a_0 + m'_2 a_1 = m_{11}.$$

Determinantul are valoarea

$$\Delta_2 = m_0' m_2' - m_1'^2 = \mu'^2$$

şi reprezintă deci *varianţa repartiţiei marginale* a lui x, număr esenţial diferit de zero:

$$a_1 = \frac{m_{01}m_2' - m_{11}m_1'}{\mu'^2} = \frac{m_{01}m_{20} - m_{11}m_{10}}{m_{00}m_{20} - m_{10}^2}; \quad a_0 = \frac{m_{00}m_{11} - m_{10}m_{01}}{m_{00}m_{20} - m_{10}^2}.$$

Deci, ecuaţia dreptei de regresiune este

$$(m_{00}m_{20} - m_{10})^2 y = (m_{01}m_{20} - m_{11}m_{10})\, x + m_{00}m_{11} - m_{10}m_{01}.$$

Reamintim că $m_{00} = 1$.

8. *Varianţele a două variabile. Covarianţa lor. Coeficientul de corelaţie.* Prin definiţie, varianţele lui x şi y sînt,

$$\mu_{20}^2 = \nu_x = \iint_D (x - m_{10})^2\, dF(x, y) = m_{20} - m_{10}^2,$$

$$\mu_{02}^2 = \nu_y = \iint_D (y - m_{01})^2\, dF(x, y) = m_{11} - m_{10}^2 m_{01},$$

iar *covarianţa* este:

$$\rho = \iint (x - m_{10})(y - m_{01})\, dF(x, y) = m_{11} - m_{10}m_{01}.$$

Coeficientul de corelaţie al celor două variabile este

$$r = \frac{\mu_{11}}{\mu_{20}\mu_{02}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\nu_x \nu_y}}.$$

Se verifică imediat că

$$r^2 \leqslant 1.$$

In adevăr, considerăm forma

$$\int [u(x - m_{10}) + v(y - m_{01})]^2\, dF(x, y) = \mu_{20}^2 u^2 + 2\mu_{11}uv + \mu_{02}^2 v^2;$$

întrucît ea este în general pozitiv definită, vom avea:

$$\mu_{11}^2 - \mu_{20}^2\mu_{02}^2 < 0,$$

relaţie echivalentă cu $r2 < 1$.

Putem avea $\mu_{11}^2 - \mu_{20}^2\mu_{02}^2 = 0$ dacă şi numai dacă nu există mase în afară de acelea de pe dreapta $u(x - m_{10}) + v(y - m_{01}) = 0$ (u şi v fiind determinate de $\mu_{20}^2 u^2 + 2\mu_{11}uv + \mu_{02}^2 v^2 = 0$.

Repartiția este atunci liniară.

Dacă variabilele sînt independente,

$$\mu_{11} = \iint_D (x - m_{10})(y - m_{01})\, dF(x, y) =$$

$$= \int (x - m_{10})\, dF_1(x) \int (y - m_{01})\, dF_2(y) = 0,$$

fiecare dintre integralele din membrul al doilea sînt nule.

In acest caz $r = 0$.

Dacă însă $r = 0$ sau $\mu_{11} = 0$, variabilele nu sînt obligator independente și *necorelate*.

Coeficientul de corelație este un indicator pentru relația dintre variabilele x și y, dar un indicator slab. Astfel, dacă masa întreagă este așezată de-a lungul unei curbe $y = f(x)$ care nu este o dreaptă, $r \neq 1$, deși y depinde funcțional de x.

Numai dacă dependența este liniară avem $r = 1$.

§ 10. Repartiția gaussiană cu n dimensiuni

1. *Repartiția gaussiană cu două dimensiuni.* Densitatea de repartiție este de forma

$$\rho(x, y) = ke^{-\varphi(x-\alpha,\, y-\beta)},$$

unde

$$\varphi(x - \alpha, y - \beta) = a(x - \alpha)^2 + 2b(x - \alpha)(y - \beta) + c(y - \beta)^2 \qquad (1)$$

este o formă de gradul al doilea *pozitiv definită* ($ac - b^2 > 0$, $a > 0$).

O transformare liniară

$$\begin{aligned} x - \alpha &= a_1\xi + b_1\eta \\ y - \beta &= a_2\xi + b_2\eta \end{aligned} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

aduce pe φ la forma canonică

$$\varphi(x - \alpha, y - \beta) = \xi^2 + \eta^2. \qquad (2)$$

Se știe, și de altfel se verifică imediat, că discriminantul formei (2) este produsul dintre discriminantul formei (1) prin δ^2, adică

$$(ac - b^2)\delta^2 = 1,$$

de unde

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}}, \qquad (3)$$

ținînd seama că $ac - b^2 > 0$, forma fiind pozitiv definită.

Intrucît va trebui ca

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y)\,dx\,dy=k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varphi(x-\alpha,\,y-\beta)}\,dx\,dy=1, \qquad (4)$$

dacă efectuăm schimbarea de variabile (2), vom găsi

$$1=k\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi^2+\eta^2)}\,d\xi\,d\eta=k\delta\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi\right)^2=k\delta\pi.$$

Ţinînd seama de (3), rezultă

$$k=\frac{1}{\pi\delta}=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}.$$

Prin urmare,

$$\rho(x,y)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\,e^{-[a(x-\alpha)^2+2b(x-\alpha)(y-\beta)+c(y-\beta)^2]}.$$

Valorile medii se calculează imediat

$$m_{10}=k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\varphi(x-\alpha,\,y-\beta)}\,dx\,dy.$$

Facem întîi schimbarea de variabilă $x-\alpha=x'$, $y-\beta=y'$, ţinînd seama de relaţia (4):

$$m_{10}=\alpha+k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x'e^{-\varphi(x',\,y')}dx'\,dy'.$$

In ultima integrală facem schimbarea de variabilă (2) şi obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x'e^{-\varphi(x',\,y')}\,dx'\,dy'=a_1\delta\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}\,d\eta+$$

$$+b_1\delta\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\eta e^{-\eta^2}d\eta=0,$$

aşa cum se verifică imediat.

Deci, $m_{10}=\alpha$ şi la fel $m_{01}=\beta$.

Punctul de coordonate α, β constituie centrul repartiţiei care este simetrică.

Vom presupune, în cele ce urmează, că aducem centrul axelor de coordonate în acest centru de simetrie, deci $m_{10} = m_{01} = 0$.

Varianțele sînt

$$\mu_{20}^2 = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\varphi(x, y)}\, dx\, dy.$$

Efectuînd schimbarea de variabile (2) cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, găsim:

$$\mu_{20}^2 = k\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1\xi + b_1\eta)^2 e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta,$$

deci

$$\mu_{20}^2 = \frac{1}{2}[a_1^2 + b_1^2].$$

Tot astfel

$$\mu_{02}^2 = \frac{1}{2}[a_2^2 + b_2^2].$$

Convarianța este

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi} \iint (a_1\xi + b_1\eta)(a_2\xi + b_2\eta)\, e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta,$$

adică

$$\mu_{11} = \frac{1}{2}(a_1 a_2 + b_1 b_2).$$

Aceste valori se pot calcula fără greutate cu ajutorul coeficienților formei φ.

Dacă

$$\varphi(x, y) = ax^2 + cy^2, \quad \text{deci} \quad b = 0,$$

atunci

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

ceea ce înseamnă că $\mu_{11} = 0$, covarianța este 0, iar variabilele sînt necorelate.

Funcția caracteristică a repartiției gaussiene este

$$\varphi(t_1, t_2) = k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x + t_2 y)} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)}\, dx\, dy.$$

Efectuînd schimbarea de variabile (2), găsim:

$$\varphi(t_1, t_2) = k\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(a_1 t_1 + a_2 t_2)\xi + (b_1 t_1 + b_2 t_2)\eta]} e^{-(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta.$$

Scanned with OKEN Scanner

In baza transformării

$$s_1 = a_1 t_1 + a_2 t_2,$$
$$s_2 = b_1 t_1 + b_2 t_2,$$

avem

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi s_1 + \eta s_2)} e^{-(\xi^2+\eta^2)} d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi s_1} e^{-\xi^2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta s_2} e^{-\eta^2} d\eta,$$

deci

$$\varphi(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{4}(s_1^2+s_2^2)} = e^{-\frac{1}{4}[(a_1^2+b_1^2)t_1^2 + 2(a_1a_2+b_1b_2)t_1t_2 + (a_2^2+b_2^2)t_2^2]}$$

sau încă

$$\varphi(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}[\mu_{20}^2 t_1^2 + 2\mu_{11} t_1 t_2 + \mu_{02}^2 t_2^2]}.$$

Repartiţiile marginale au densităţile

$$\rho_1(x) = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dy$$

sau

$$\rho_1(x) = ke^{-\frac{ac-b^2}{c}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(y+\frac{b}{c}x\right)} dy$$

sau, efectuînd integrarea după schimbarea de variabile indicată obţinem:

$$\rho_1(x) = \sqrt{\frac{ac-b^2}{c}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{ac-b^2}{c}x^2} = \frac{1}{\delta\sqrt{c\pi}} e^{-\frac{x^2}{c\delta^2}},$$

care este o distribuţie gaussiană cu o dimensiune; tot astfel:

$$\rho_2(y) = \frac{1}{\delta\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{y^2}{a\delta^2}}.$$

2. *Repartiţia gaussiană cu n dimensiuni.* Densitatea de repartiţie este de forma

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_n e^{-\sum_{i,k}^{1,\ldots,n} a_{ik}(x_i-a_i)(x_k-a_k)},$$

unde $\varphi = \sum_{i,k}^{1,\dots,n} a_{ik} x_i' x_k'$ este o formă pătratică pozitiv definită cu discriminantul Δ.

Pentru determinarea lui k_n să observăm că

$$k_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(x_1, \dots, x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x_i' = x_i - \alpha_i = \sum_1^n {}_j h_{ij} \xi_j$$

cu determinantul

$$\delta = |h_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

care transformă $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ într-o sumă de pătrate,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2,$$

vom avea

$\Delta\delta^2 = 1$ (discriminantul formei din membrul al doilea),

deci

$$k_n \delta \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = 1$$

sau

$$k_n \delta (\sqrt{\pi})^n = 1.$$

Prin urmare,

$$k_n = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi^n}}.$$

Ca și în cazul $n = 2$, se verifică imediat că

$$\alpha_i = M(x_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

De asemenea,

$$M((x_i - \alpha_i)^2) = k_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \alpha_i)^2 e^{-\varphi(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd schimbarea de variabile de mai sus, găsim:

$$M((x_i-\alpha_i)^2)=k_n\delta\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_1^n h_{ij}\xi_j\right)^2 e^{-\sum_1^n \xi_k^2}d\xi_1\,d\xi_2\dots d\xi_n.$$

Cum

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_j\xi_k e^{-\sum_1^n \xi_k^2}d\xi_1\dots d\xi_n=0\quad(j\neq k),$$

iar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\xi_j^2 e^{-\sum_1^n \xi_k^2}d\xi_1\dots d\xi_n=\prod_{k\neq j}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_k^2}d\xi_k\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\xi_j^2 e^{-\xi_j^2}d\xi_j=$$

$$=(\sqrt{\pi})^{n-1}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2}(\sqrt{\pi})^n,$$

obţinem:

$$M((x_i-\alpha_i)^2)=\frac{1}{2}k_n\delta(\sqrt{\pi})^n(h_{i1}^2+\dots+h_{in}^2)=\frac{1}{2}(h_{i1}^2+\dots+h_{in}^2).$$

§ 11. Reprezentarea repartiţiilor cu o dimensiune

1. *Polinoame ortogonale corespunzătoare unei repartiţii.* Fie $F(x)$ o funcţie de repartiţie care are o infinitate de *puncte de creştere*, adică puncte ca x_0, pentru care

$$F(x_0+\alpha)>F(x_0-\alpha),$$

pentru orice α *pozitiv.*

Se poate determina un şir infinit de polinoame $p_1(x)$, $p_2(x),\dots,p_n(x),\dots$ *cu gradul efectiv indicat de indice, care satisfac condiţiile de ortogonalitate*

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_n(x)\,p_m(x)\,dF(x)=\begin{cases}0 & m\neq n,\\ 1 & m=n.\end{cases}\qquad(1)$$

Pentru a demonstra aceasta, considerăm forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\xi_0+\xi_1x+\dots+\xi_nx^n)^2dF(x)=\sum_{i,k}^{0,\dots,n}M_{i+k}\,\xi_i\xi_k,\qquad(2)$$

unde $M_j=\int_{-\infty}^{\infty}x^j dF(x)$ este momentul de ordinul j al repartiţiei.

Intrucît $dF(x)>0$ într-o infinitate de puncte, iar $\xi_0+\xi_1x+\dots+\xi_nx^n$ nu poate fi zero decît în cel mult n puncte reale,

membrul întîi este pozitiv, deci forma din membrul al doilea este pozitiv definită. Această constatare aduce după sine concluzia că determinantul formei (2) este pozitiv:

$$d_n = \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_n \\ M_1 & M_2 & \dots & M_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_n & M_{n+1} & \dots & M_{2n} \end{vmatrix} > 0. \tag{3}$$

Vom pune:

$$p_n(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_n x^n.$$

Relaţia (1) ne arată că

$$p_0(x) = 1;$$

tot (1) ne arată că

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m p_n(x)\, dF(x) = 0 \tag{4}$$

pentru $m = 0, 1, \dots, n-1$, deoarece x^m se poate scrie ca o combinaţie liniară a polinoamelor $p_0(x)$, $p_1(x), \dots, p_m(x)$, care sînt de gradele efectiv indicate de indici.

Dar atunci din (4) rezultă că polinomul $p_n(x)$ are forma

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_n \\ M_1 & M_2 & \dots & M_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n-1} & M_n & \dots & M_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \tag{5}$$

unde A_n este o constantă arbitrară diferită de zero. Coeficientul lui x^n este $A_n d_{n-1}$, prin urmare [v. (3)] este diferit de zero. A_n va fi determinat prin condiţia de ortogonalitate

$$\int p_n^2(x)\, dF(x) = 1$$

şi prin precizarea $A_n > 0$.

Polinoamele $p_n(x)$ ortogonale faţă de $F(x)$ sînt astfel bine şi unic determinate de această repartiţie.

Observație. Dacă $F(x)$ are numai un număr finit, de exemplu N, de puncte de creștere, polinoamele $p_0(x)=1, p_1(x), \ldots, p_{N-1}(x)$ sînt determinate, deoarece $d_n>0$, pentru $n\leq N-1$.

Avem $0=D_N=D_{N+1}=\ldots$, deci nu putem vorbi de o determinare a unor polinoame de grad mai mare decît $N-1$.

2. *Dezvoltări de tip Charlier.* Vom presupune că repartiția $F(x)$ are o densitate

$$dF(x)=\rho(x)\,dx.$$

Să considerăm o funcție de densitate $h(x)$, pentru care presupunem că există momente de toate ordinele. In acest caz, integralele

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)\,h(x)\,dx \tag{6}$$

există și au valori finite pentru orice n.

In condiții destul de generale pentru $h(x)$ vom putea scrie

$$h(x)=\sum a_n p_n(x).$$

Aceasta este în particular exact dacă seria din membrul al doilea este absolut și uniform convergentă.

Astfel de dezvoltări în serie sînt în multe împrejurări utile. Sînt valoroase în special dezvoltările corespunzătoare polinoamelor ortogonale determinate de repartiția gaussiană.

Polinoamele lui Hermite. Dacă

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

polinoamele ortogonale corespunzătoare sînt, în afară de factori numerici, *polinoamele lui Hermite*, definite de relația

$$\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}=(-1)^n H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (n=0,\ 1,\ldots),$$

deoarece ele verifică relațiile

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\,H_m(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\begin{cases} 0, & m\neq n,\\ n!, & m=n.\end{cases}$$

Vom pune deci, în acest caz, pentru a norma șirul:

$$p_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!}}H_n(x). \tag{7}$$

3. *Dezvoltarea de tip Charlier cu polinoamele* $H_n(x)$. Pentru o densitate $h(x)$ vom avea:

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(a_0+a_1H_1(x)+a_2\frac{1}{\sqrt{2}}H_2(x)+\right.$$
$$\left.+a_3\frac{1}{\sqrt{6}}H_3(x)+\ldots\right). \tag{8}$$

In această dezvoltare, coeficienții a_i sînt dați de egalitățile (6), unde polinoamele $p_n(x)$ sînt specificate de relația (7):

$$a_0=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,dx=1,$$

$$a_1=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)H_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}xh(x)\,dx=m_1,$$

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)H_2(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-1)h(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}(m_2-1),$$

$$a_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)H_3(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^3-3x)h(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{6}}(m_3-3m_1),$$

$$a_4=\frac{1}{\sqrt{24}}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)H_4(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{24}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^4-6x^2+3)h(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{24}}(m_4-6m_2+3).$$

Dacă presupunem că am redus variabila dată astfel ca $m_1=0$, $m_2=1$, valorile coeficienților sînt

$$a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{m_3}{\sqrt{6}},\quad a_n=\frac{m_n-3}{\sqrt{24}},$$

iar dezvoltarea devine

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{m_3}{3!}H_3+\frac{m_4-3}{4!}H_4+\ldots\right).$$

Coeficienţii primilor doi termeni după 1 din această dezvoltare au o semnificaţie geometrică pentru curbele care reprezintă funcţia $y=h(x)$.

Vom pune

$$\gamma_1 = m_3, \quad \gamma_2 = m_4 - 3$$

şi-i vom numi:

γ_1 — *coeficient de asimetrie;*

γ_2 — *coeficient de exces.*

Dacă abaterea tip μ_2 este diferită de 1, aceşti coeficienţi iau forma

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\mu^3}, \quad \gamma_2 = \frac{m_4}{\mu^4} - 3.$$

Rămîne de stabilit ce condiţii verifică funcţia $h(x)$ pentru ca dezvoltarea (8) să fie valabilă.

Se demonstrează că pentru aceasta este suficient ca integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

să existe şi să aibă o valoare finită.

De altfel, în general, nu avem nevoie chiar de toţi termenii unei asemenea dezvoltări. Sînt importanţi pentru caracterizarea funcţiei $h(x)$ numai cîţiva termeni din dezvoltare, în particular chiar numai acei termeni pe care i-am scris efectiv, adică primii trei termeni. Ei ne dau indicaţii în genere suficiente pentru alura funcţiei.

§ 12. Distribuţiile lui Pearson

Definiţie. Foarte numeroase distribuţii au o *funcţie de frecvenţă* (densitate de repartiţie), care verifică o relaţie diferenţială de forma

$$\frac{y'}{y} = \frac{a_1 + x}{a_2 + a_3 x + a_4 x^2} \qquad (1)$$

sau se deduce din aceasta printr-o schimbare liniară de variabile, sau este o limită de funcţii de acest fel cînd cei patru parametri depind de un acelaşi parametru, pe care-l facem să se apropie de o anumită valoare limită. Pentru completa determinare a lui y, deci pentru a determina cei patru parametri care figurează în (1), este necesar să cunoaştem primele patru

momente (m_1, m_2, m_3, m_4) ale repartiției. Constanta de integrare se determină impunînd condiția de normare

$$\int \rho(x)\,dx = 1, \tag{2}$$

intervalul de integrare fiind acela în care considerăm repartiția.

Este evident că y dat de (1) este caracterizat în primul rînd de natura rădăcinilor ecuației $a_2+a_3x+a_4x^2=0$.

1. Dacă există două rădăcini reale distincte α_1 și α_2, membrul al doilea din (1) se descompune într-o sumă de două funcții simple

$$\frac{y'}{y} = \frac{b_1}{x-\alpha_1} + \frac{b_2}{x-\alpha_2} \qquad b_1+b_2 \neq 0$$

și, prin urmare,

$$y = k\,(x-\alpha_1)^{b_1}(x-\alpha_2)^{b_2}$$

pentru

$$\alpha_1 < x < \alpha_2.$$

a) Obținem în acest caz densitatea de repartiție normală dacă luăm

$$\alpha_1 = -n, \quad \alpha_2 = n,$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}n^2, \quad k = hn^{-n^2},$$

ceea ce dă

$$y = h\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n^2},$$

și facem pe n să tindă către infinit. Obținem:

$$y = he^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

b) Pentru $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $y=kx^{b_1}(1-x)^{b_2}$ $(0<x<1)$, avem distribuții legate de funcțiile Beta.

In acest caz, trebuie să avem:

$$k\int_0^1 x^{b_1}(1-x)^{b_2}dx = 1,$$

ceea ce implică $b_1>-1$, $b_2>-1$.

Dacă punem $b_1=p_1-1$, $b_2=p_2-1$ $(p_1>0,\ p_2>0)$, știm că

$$B(p_1,\ p_2) = \int_0^1 x^{p_1-1}(1-x)^{p_2-1}dx = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}, \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

prin urmare

$$k=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}=\frac{\Gamma(b_1+1)\,\Gamma(b_2+1)}{\Gamma(b_1+b_2+2)},$$

deci

$$y=\frac{\Gamma(b_1+1)\,\Gamma(b_2+1)}{\Gamma(b_1+b_2+2)}\,x^{b_1}(1-x)^{b_2}.$$

c) Dacă punem $b_2=\alpha_2\alpha$, $k=he^{\alpha\alpha_1}\alpha_2^{-\alpha\alpha_2}$, obţinem:

$$y=h\,(x-\alpha_1)^{b_1}\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2\alpha}e^{\alpha_1\alpha}.$$

Făcînd $\alpha_2\to\infty$, găsim:

$$y=h\,(x-\omega)^{\lambda-1}e^{-\alpha\,(x-\omega)}\qquad(x>\omega),\tag{4}$$

după ce am schimbat notaţiile.

Această repartiţie este legată de repartiţia definită cu ajutorul funcţiei $\Gamma(\lambda)$, după ce am mutat originea în $x=\omega$, cum se verifică imediat. In acest caz,

$$h=\frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}$$

şi are ca funcţie caracteristică

$$f(t)=\frac{1}{\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{\lambda}}\qquad(\omega=0).\tag{5}$$

Din ea derivă repartiţia foarte cunoscută statisticienilor şi numită a lui χ^2.

d) Alegînd convenabil pe k, dacă $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$, obţinem *repartiţia lui Fisher:*

$$y=kx^{b_2}\,(x+1)^{b_1},\tag{6}$$

care joacă un rol important.

2. Cînd cele două rădăcini sînt imaginare, avem soluţii de forma

$$y=\frac{k}{(a_2+a_3x+a_4x^2)^m}\qquad(-\infty<x<\infty),\tag{7}$$

dacă între constantele date este o relaţie care se verifică cu uşurinţă, iar $m>\frac{1}{2}$.

Aceasta cuprinde, ca un caz particular, *repartiția lui Student:*

$$y = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (8)$$

§ 13. Tipuri de convergență ale șirurilor de variabile aleatorii

1. *Definiții.* Fie $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, ..., $f_n(\xi)$, ... un șir de variabile aleatorii definite pe cîmpul de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$ și $f(\xi)$ o variabilă aleatorie definită de asemenea pe acest cîmp.

Convergența B. Șirul $\{f_n(\xi)\}$ *converge B (în sensul Bernoulli) către* $f(\xi)$, *dacă* $F_n(a) \to F(a)$ *în orice punct* $a \in R$ *de continuitate al funcției* $F(a) = P[f(\xi) < a]$.

Tipuri de convergență B. Distanța în spațiul funcțiilor de repartiție. Convergența definită aici este foarte des folosită în teoria probabilităților, fie direct, prin constatarea convergenței funcțiilor de repartiție, fie indirect, prin constatarea convergenței funcțiilor caracteristice.

Cîtă vreme cercetarea se mărginește la găsirea funcției de repartiție sau a funcției caracteristice limită, procesul de realizare a limitei nu prezintă interes.

Sînt însă împrejurări, în special în Mecanica statistică clasică sau cuantică, în care acest proces este cu deosebire important, cînd interesează $F_n(x)$ pentru n mare. In acest caz, este necesar să se evalueze eroarea care se face luînd $F_n(a)$ în loc de $F(a)$. Aceasta cere însă introducerea unei *distanțe în spațiul funcțiilor de repartiție sau al funcțiilor caracteristice* sau alte metrizări echivalente.

O atare distanță între repartițiile a două variabile aleatorii $f_1(\xi)$ și $f_2(\xi)$ este, de exemplu, valoarea absolută a variației totale a diferenței $F_1(a) - F_2(a)$:

$$R_1(F_1, F_2) = |\text{var. tot.}(F_1 - F_2)|.$$

Altă distanță este

$$R_2(F_1, F_2) = \sup |F_1(a-0) - F_2(a-0)|.$$

Convergența după R_1 este mai tare decît convergența după R_2. Evaluările asimptotice ale sumelor de variabile cu valori în-

tregi ale lui *Gnedenko* în legătură cu legea lui Gauss sînt rezultatele aplicării unor astfel de criterii de convergență.

Convergența în probabilitate (C_p). *Șirul* $\{f_n(\xi)\}$ *converge în probabilitate (sau măsură) către* $f(\xi)$ *dacă,* $\varepsilon > 0$ *și* $\eta > 0$ *fiind date, există* $N(\varepsilon, \eta)$ *astfel încît*

$$P(\{x \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}) < \eta, \tag{1}$$

pentru $n \geq N(\varepsilon, \eta)$.

Criteriul lui Slutsky. Condiția necesară și suficientă pentru ca șirul $\{f_n(\xi)\}$ să conveargă în probabilitate este următoarea: dacă ε și η sînt dați, există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel ca

$$P(\{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f_m(\xi)| > \varepsilon\}) < \eta,$$

dacă $n, m > N(\varepsilon, \eta)$.

Convergența aproape sigură (C_{as}). *Șirul* $\{f_n(\xi)\}$ *converge aproape sigur (sau aproape peste tot) către* $f(\xi)$ *dacă există o mulțime* $E_0 \in \mathcal{K}$ *cu* $P(E_0) = 0$ *astfel încît*

$$f_n(\xi) \to f(\xi)$$

pentru orice $x \in E - E_0$; prin urmare, dacă $f_n(\xi)$ converge în mod obișnuit către $f(x)$ cu excepția unei mulțimi E_0 de probabilitate nulă.

Convergența tare (C_t). *Șirul* $\{f_n(\xi)\}$ *converge tare către* $f(\xi)$ *dacă,* $\varepsilon > 0$ *și* $\eta > 0$ *fiind dați, există* $N(\varepsilon, \eta)$ *astfel încît*

$$P\Big(\bigcup_{n \geq N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big) < \eta. \tag{2}$$

Este ușor de văzut că (2) este echivalentă cu

$$P\Big(\bigcap_{n \geq N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid\mid f_n((\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon\}\Big) \geq 1 - \eta. \tag{3}$$

Demonstrăm întîi o egalitate auxiliară, plecînd de la

$$\{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\} = \mathbf{C}\{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon\}.$$

Atunci

$$\mathbf{C}\bigcup_{n \geq N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\} = \bigcap_{n \geq N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon\}.$$

Dar

$$\Big|\mathbf{C}\bigcup_{n \geq N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big| \cup \Big|\bigcup_{n \geq N(\varepsilon, \eta)} \{\xi \mid\mid f_n(\xi) - f(\xi)| > \varepsilon\}\Big| = E$$

și

$$\left[\mathbf{C}\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right]\cap\left[\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right]=\Phi$$

Rezultă egalitatea căutată:

$$P\left(\mathbf{C}\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right)+P\left(\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right)=$$

$$=P(E)=1 \qquad (4)$$

Dacă relația (3) este îndeplinită, atunci

$$P\left(\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right)=1-P\left(\mathbf{C}\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right)=$$

$$=1-P\left(\bigcap_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|\leq\varepsilon\}\right)<1-1+\eta=\eta,$$

deci relația (2) este verificată. Invers, din (2) rezultă (3):

$$\left(P\bigcap_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|\leq\varepsilon\}\right)=P\left(\mathbf{C}\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right)=$$

$$=1-P\left(\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\xi\,|\,|f_n(\xi)-f(\xi)|>\varepsilon\}\right)>1-\eta.$$

Convergența în medie. Pentru enunțarea condițiilor de convergență în medie de ordinul r este necesar să presupunem că există integralele

$$\int_E |f_n(\xi)|^r P(d\xi) \qquad n=1,\ 2,\ldots$$

și

$$\int_E |f(\xi)|^r P(d\xi).$$

Șirul $f_n(\xi)$ converge în medie de ordinul r (întreg ≥ 1) către $f(\xi)$ dacă

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(\xi)-f(\xi)|^r P(d\xi)=0.$$

2. *Ordonarea tipurilor de convergență.*

a) *Convergența în sensul Bernoulli nu atrage convergența în probabilitate.*

Să luăm

$$E=[0,\ 1],\quad K=B,\quad P=L^*,$$

$$f_n(\xi)=\begin{cases}0 & 0\leq\xi<\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\leq\xi\leq 1\end{cases},\quad n=1,\ 2,\ldots,$$

și

$$f(\xi)=\begin{cases}1 & 0 \leq \xi < \frac{1}{2},\\ 0 & \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1.\end{cases}$$

Atunci

$$P(\{\xi \,|\, f_n(\xi)-f(\xi)|=1\})=1,$$

deci $f_n(\xi)$ nu converge către $f(\xi)$ în probabilitate.

Totuși, $\lim_{n\to\infty} F_n(a)=F(a)$ pentru orice $a \in R$, $F_n(a)$ fiind funcția de repartiție a variabilei $f_n(\xi)$ și $F(a)$ funcția de repartiție a variabilei $f(\xi)$. In adevăr:

$$F_n(a)=\begin{cases}0 & a \leq 0,\\ \frac{1}{2} & 0<a\leq 1,\\ 1 & 1<a;\end{cases} \qquad F(a)=\begin{cases}0 & a \leq 0,\\ \frac{1}{2} & 0<a\leq 1,\\ 1 & 1<a;\end{cases}$$

deci

$$F_n(a)=F(a).$$

Se poate totuși demonstra teorema: *Dacă $f_n(\xi)$ converge în sensul Bernoulli către o constantă w, șirul $f_n(\xi)$ converge în probabilitate către w.*

Demonstrație. Fie deci $F_n(a)=P(x_n<a)$, $F(a)=P(x<a)$. Avem:

$$F(a)=\begin{cases}0 & a \leq w,\\ 1 & a>u.\end{cases}$$

Singurul punct de discontinuitate al funcției $F(a)$ este punctul $a=w$. Avem:

$$\begin{aligned}0 &\leq 1-P(\{\xi \,|\, f_n-w|\leq \varepsilon\})=1-P\{\xi \,|\, w-\varepsilon \leq f_n(\xi)\leq w+\varepsilon\}) \leq\\ &\leq 1-P(\{\xi \,|\, w-\varepsilon \leq f_n(\xi)<w+\varepsilon\}) \leq\\ &\leq 1-[P(\{\xi \,|\, f_n(\xi)<w+\varepsilon\})-P(\{\xi \,|\, f_n(\xi)<w-\varepsilon\})=\\ &=F(w+\varepsilon)-F(w-\varepsilon)-[F_n(w+\varepsilon)-F_n(w-\varepsilon)].\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$P(\{\xi \,|\, f_n(\xi)-w|\leq \varepsilon\})\to 1,$$

deci

$$P(\{\xi \,|\, f_n-w|>\varepsilon\})\to 0.$$

$f_n(\xi)$ converge în probabilitate către w, deci teorema este demonstrată.

b) *Dacă $f_n(\xi)$ converge în probabilitate către $f(\xi)$, $F_n(a)$ converge către $F(a)$ în orice punct de continuitate al lui $F(a)$, $F_n(a)$ fiind funcția de repartiție a lui $x_n(\xi)$, iar $F(a)$ funcția de repartiție a lui $f(\xi)$.*

Demonstrație. Vom folosi următoarea *lemă*, pe care o vom demonstra la urmă.

Fie $x=f(\xi)$ și $y=g(\xi)$ două variabile aleatorii și A, η două numere dintre care $\eta>0$. Atunci

$$|P(\{\xi|f(\xi)<A\})-P(\{\xi|y<A\}|\leq[P(\{\xi|f(\xi)<A+\eta\})-$$
$$-P(\{\xi|f(\xi)<A-\eta\})+P(\{\xi||f(\xi)-g(\xi)|>\eta.$$

Revenind acum la demonstrarea teoremei, fie $\varepsilon>0$ și $\eta>0$. Există $N(\varepsilon,\eta)$ astfel încît

$$P(\{\xi|'f_n(\xi)-f(\xi)|\geq\eta\})<\varepsilon \quad \text{pentru } n\geq N(\varepsilon,\eta).$$

După lema precedentă

$$|F_n(a)-F(a)|\leq|F(a+\eta)-F(a-\eta)|+\varepsilon.$$

Dacă $F(a)$ este continuă în punctul a, atunci

$$|F(a+\eta)-F(a-\eta)|\leq\varepsilon,$$

dacă η este destul de mic. Atunci pentru n destul de mare

$$|F_n(a)-F(a)|\leq 2\varepsilon,$$

deci $F_n(a)$ converge către $F(a)$ în orice punct $a\in R$ de continuitate al funcției $F(a)$.

Pentru demonstrarea lemei enunțată mai sus, fie A și $\eta>0$ constantele din lemă. Avem:

$$\{\xi|x<A,\ g\geq A\}\cup\{\xi|f(\xi)\geq A,\ g(\xi)<A\}<$$
$$<\{\xi|A-\eta\leq f(\xi)<A+\eta\}\cup\{\xi||f(\xi)-g(\xi)|\geq\eta\}.$$

Deci,

$$P(\{\xi|f(\xi)<A,\ g(\xi)\geq A\})+P(\{\xi|f(\xi)\geq A,\ g(\xi)<A\})\leq$$
$$\leq P(\{\xi|A-\eta\leq f(\xi)<A+\eta\})+P(\{\xi||f(\xi)-g(\xi)|\geq\eta\})=$$
$$=|F(A+\eta)-F(A-\eta)|+P(\{\xi|f(\xi)-g(\xi)|\geq\eta\}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$P(\{\xi \mid f(\xi) < A\}) = P(\{\xi \mid f(\xi) < A,\ g(\xi) < A\})$$

și

$$P(\{\xi \mid g(\xi) < A\}) = P(\{\xi \mid f(\xi) < A,\ g(\xi) < A\}) + P(\{\xi \mid f(\xi) \geq A,\ g(\xi) < A\}).$$

Deci,

$$P(\{\xi \mid f(\xi) < A\}) - P(\{\xi \mid g(\xi) < A\}) = P(\{\xi \mid f(\xi) < A,\ g(\xi) \geq A\}) - P(\{\xi \mid f(\xi) \geq A,\ g(\xi) < A\}) \leq P(\{\xi \mid f(\xi) < A,\ g(\xi) \geq A\})$$

și

$$P(\{\xi \mid g(\xi) < A\}) - P(\{\xi \mid f(\xi) < A\}) = P(\{\xi \mid f(\xi) \geq A,\ g(\xi) < A\}) - P(\{\xi \mid f(\xi) < A,\ g(\xi) \geq A\}) \leq P(\{\xi \mid f(\xi) \geq A,\ g(\xi) < A\}).$$

Prin urmare,

$$|P(\{\xi \mid f(\xi) < A\}) - P(\{\xi \mid g(\xi) < A\})| \leq |F(A+\eta) - F(a-\eta)| + P(\{\xi \mid |f(\xi) - g(\xi)| \geq \eta\}),$$

adică inegalitatea căutată.

Observație. Este ușor de văzut că $F_n(a) \to F(a)$ în orice punct de continuitate al funcției $F(a)$ nu atrage

$$P(f_n < a) \to P(f < a)$$

pentru orice $a \in R$. Iată un exemplu. Fie

$$f_n(x) = -\frac{1}{n} \quad \text{pentru} \quad x \in E$$

și

$$f(x) = 0 \quad \text{pentru} \quad x \in E.$$

Atunci

$$F_n(a) = \begin{cases} 0 & a \leq -\dfrac{1}{n}, \\ 1 & a > -\dfrac{1}{n}; \end{cases}$$

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0, \\ 1 & a > 0. \end{cases}$$

Dar

$$F_n(a) \to F(a) = \begin{cases} 0 & a < 0, \\ 1 & a \geq 0 \end{cases}$$

și

$$F^*(a)=\begin{cases} F(a) & a\neq 0 \\ 1\neq F(a)=0, & a=0, \end{cases}$$

ceea ce demonstrează afirmația noastră.

Observație în legătură cu convergența în măsură. Dacă un șir $f_n(\xi)$ de variabile aleatorii converge în sensul Bernoulli către $f(\xi)$ și către $f^*(\xi)$, se poate ca

$$f(\xi)\neq f^*(\xi)$$

pentru orice $\xi \in F$.

Dacă șirul $f_n(\xi)$ converge în probabilitate către $f(\xi)$ și de asemenea către $f^*(\xi)$, atunci $f(\xi)$ și $f^*(\xi)$ coincid, cu excepția unei mulțimi E_0 de probabilitate zero. Pentru aceasta nu avem decît să observăm că

$$|f(\xi)-f^*(\xi)|\leq |f(\xi)-f_n(\xi)|+|f_n(\xi)-f^*(\xi)|,$$

deci

$$\{\xi \,\|\, f(\xi)-f^*(\xi)|>\varepsilon\}\subset\left\{\xi \,\|\, f(\xi)-f_n(\xi)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\xi\,|f_n(\xi)-f^*(\xi)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

și, prin urmare,

$$P(\{\xi \,\|\, f(\xi)-f^*(\xi)|>\varepsilon\})\leq P\left(\left\{\xi\,|f(\xi)-f_n(\xi)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+$$

$$+P\left(\left\{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f^*(\xi)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

Dacă luăm pe n destul de mare, rezultă că

$$P(\xi \,\|\, f(\xi)-f^*(\xi)|>\varepsilon\}|=0.$$

Dar

$$P(\{\xi\| f(\xi)-f^*(\xi)|>0\})=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\xi \,\|\, f(\xi)-f^*(\xi)|>\frac{1}{n}\right\}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}P(\xi)\,|f(\xi)-f^*(\xi)|>\frac{1}{n}\Big\}\Big)=0,$$

de unde

$$P(\{\xi \,\|\, f(\xi)-f^*(\xi)|>0\})=0.$$

Variabilele aleatorii limită coincid, deci, aproape peste tot. Ele sînt *variabile echivalente.*

c) *Un șir de variabile aleatorii aproape sigur convergent converge tare.*

Demonstrație. Fie e mulțimea din $\mathcal{K}$ pe care $f_n(\xi)$ converge către $f(\xi)$. Cum am presupus că $f_n(\xi)$ converge aproape sigur către $f(\xi)$, urmează

$$P(E-e)=0 \quad \text{sau} \quad P(e)=1.$$

Fie

$$e_{n,\varepsilon}=\{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)\,| \leqq \varepsilon\}, \qquad \varepsilon>0$$

și

$$E_{n,\varepsilon}=\bigcap_{i\geqq n} e_{i,\varepsilon}.$$

Este evident că

$$E_{j,\varepsilon}\subset E_{j+1,\varepsilon} \qquad (j=1,\ 2,\ldots)$$

și că

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,\varepsilon}\supset e,$$

oricare ar fi $\varepsilon>0$, căci $f_n(\xi)\to f(\xi)$ pentru $\xi\in e$.

Prin urmare,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,\varepsilon}\right)=1,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} P(E_{n,\varepsilon})=1.$$

Să dăm acum $\varepsilon>0$ și $\eta>0$. Să demonstrăm că există $N(\varepsilon,\eta)$ astfel încît

$$P\left(\bigcap_{n\geqq N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)\,| \leqq \varepsilon\}\right)>1-\eta. \tag{5}$$

Va fi suficient să demonstrăm că

$$P\left(\bigcap_{n\geqq N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)\,|<\varepsilon\}\right)>1-\eta. \tag{6}$$

Dar

$$\bigcap_{n\geqq j} \{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)\,|<\varepsilon\}=E_{j,\varepsilon}$$

și

$$P(E_{j,\varepsilon})>1-\eta,$$

dacă $j>N'$ este convenabil ales. Este suficient să luăm $N(\varepsilon,\eta)=N'$ pentru ca (6), deci și (5), să fie satisfăcute. Deci, convergența *aproape sigură implică pe cea tare.* Mai trebuie acum să demonstrăm că convergența tare implică pe cea aproape sigură pentru a demonstra echivalența între cele două moduri de convergență.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. (6) implică (5), deoarece

$$\bigcap_{n\geq N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)|\leq\varepsilon\} \supset \bigcap_{n\geq N(\varepsilon,\eta)} \{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)|<\varepsilon\}.$$

d) *Un șir de variabile aleatorii tare convergent este și aproape sigur convergent.*

Demonstrație. Cum $x_n(\xi)$ converge tare către $x(\xi)$, $\varepsilon>0$ și $\eta>0$ fiind dați, putem găsi un număr întreg N astfel încît

$$P\left(\bigcap_{j\geq N} \{\xi \,\|\, f_n(\xi)-f(\xi)|\leq\varepsilon\}\right)>1-\eta.$$

Fie p un întreg arbitrar strict pozitiv. Fie $e^{(p)}$ mulțimea punctelor $\xi\in E$ pentru care

$$|f_n(\xi)-f(\xi)|<\frac{1}{p}$$

pentru orice n mai mare sau egal cu un anumit întreg N_p.

Din cele ce preced rezultă că putem alege N_p astfel, încît

$$P(e^{(p)})>1-\frac{1}{2^p} \quad \text{și} \quad N_p>N_{p+1}.$$

Mulțimea E_r, care consistă în intersecția mulțimilor $e^{(r+1)}$, $e^{(r+2)},\ldots,e^{(r+p)},\ldots$, va avea o probabilitate mai mare sau egală cu $1-\frac{1}{2^r}$.

Cu atît mai mult, probabilitatea intersecției numai a unei părți din șirul mulțimilor

$$e^{(r+1)},\ e^{(r+2)},\ldots,e^{(r+p)},\ldots$$

este mai mare sau egală cu $1-\frac{1}{2^r}$.

Prin urmare, în particular,

$$P(F_n)\geq 1-\frac{1}{2^r},$$

cînd $N_{r+1}\leq n<N_{r+2}$, unde

$$F_n=\bigcap_{j=n}^{\infty} \{\xi \,\|\, x_j(\xi)-x(\xi)|<\varepsilon_j\}$$

și unde

$$\varepsilon_n=\frac{1}{r+1}$$

și, prin urmare,

$$\varepsilon_{N_{r+1}} = \varepsilon_{1+N_{r+1}} = \varepsilon_{2+N_{r+1}} = \ldots = \varepsilon_{N_{r+2}-1} = \frac{1}{r+1},$$

$$\varepsilon_{N_{r+2}} = \varepsilon_{1+N_{r+2}} = \ldots = \frac{1}{r+2}, \ldots$$

Cînd n crește indefinit, și r crește indefinit și prin urmare șirul ε_n tinde către zero iar $P(F_n)$ către unitate.

Rezultă atunci că mulțimea Q a punctelor $\xi \in E$ pentru care $x_n(\xi) \to x(\xi)$ are probabilitatea 1, căci $Q \supset F_n$ pentru orice n și cum

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n) = 1$$

și

$$P(F_n) \leqq P(Q),$$

deducem

$$P(Q) = 1.$$

Am demonstrat, prin urmare, că un șir de variabile aleatorii tare convergent este și aproape sigur convergent. Dacă ținem seamă și de teorema *c*, obținem *că cele două tipuri de convergențe sînt echivalente.*

Inainte de a încheia acest paragraf, vom face cîteva observații cu privire la legăturile dintre convergența tare, convergența aproape sigură și cea în probabilitate.

Dacă ținem seamă de definițiile C_{as} și C_t, se vede imediat că un șir convergent tare — convergent aproape sigur este și convergent în probabilitate. Implicația inversă nu este valabilă.

In concluzie:

convergența aproape sigură $\longleftrightarrow$ *convergența tare;*

convergența tare $\to$ *convergența în probabilitate;*

convergența în probabilitate $\to$ *convergența în sensul Bernoulli;*

convergența în medie de ordinul $r (\geqq 1) \to$ *convergența în probabilitate.*

Exemplele date în cursul acestui paragraf arată că nici una dintre implicațiile inverse nu este valabilă. Demonstrăm aici și ultima afirmație.

e) *Dacă* $f_n(\xi)$ *converge în medie de ordinul* r *către* $f(\xi)$, $f_n(\xi)$ *converge și în probabilitate către* $f(\xi)$.

Demonstrație. Să presupunem că $f_n(\xi)$ nu ar converge în probabilitate către $f(\xi)$. Atunci ar exista $\varepsilon \geq 0$, $\eta_i \geq 0$ și un șir de numere $n_i \to \infty$, astfel încît

$$P(\{\xi \| f_{n_i}(\xi) - f(\xi)| \geq \varepsilon\}) \geq \eta_i$$

pentru orice i. Dar

$$\left[\int_E |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)|^\nu P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} \geq \left| \int_{\{x \| f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}} |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)|^\nu P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} \geq$$

$$\geq [\varepsilon^\nu P(\{\xi \| f_{n_i}(\xi) - f(\xi)| \geq \varepsilon\})]^{\frac{1}{\nu}} \geq [\varepsilon^\nu \eta_i]^{\frac{1}{\nu}} = \varepsilon \eta_i^{\frac{1}{\nu}}.$$

Deci,

$$\left[\int_E |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)|^\nu P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} \geq \varepsilon \eta_i^{\frac{1}{\nu}},$$

ceea ce ne conduce la o contradicție, deoarece

$$\lim_n \left[\int_E |f_n(\xi) - f(\xi)|^\nu P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} = 0,$$

deci și

$$\lim_i \left[\int_E |f_{n_i}(\xi) - f(\xi)| P(d\xi)\right]^{\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Prin urmare, șirul $f_n(\xi)$ converge în măsură către $f(\xi)$.

§ 14. Echivalența asimptotică și stabilitatea șirurilor

1. *Definiții. Echivalența a două șiruri* $\{f_n\}$ și $\{g_n\}$ de variabile aleatorii ale unui cîmp probabilizat $\{E, \mathcal{K}, P\}$ se definește în raport cu fiecare dintre tipurile de convergență.

Cele două șiruri sînt echivalente B (în sensul Bernoulli), în probabilitate, tare, *aproape sigur sau în medie de ordinul r, dacă* $\{f_n - g_n\}$ *converge către zero, după criteriul respectiv.*

Vom numi *domeniu de stabilitate al unui șir* $\{f_n\}$ după unul dintre criteriile precedente, mulțimea șirurilor echivalente cu $\{f_n\}$ după acel criteriu.

Deosebit de important este domeniul de stabilitate al unui șir numeric $\{a_n\}$. Șirurile $\{f_n\}$ aparținînd unui atare cîmp se numesc *stabile*.

Un şir $\{f_n\}$ *este propriu stabil*[1]) dacă aparţine domeniului de stabilitate al şirului valorilor sale medii. Deci, de exemplu:

Şirul $\{f_n\}$ *este propriu stabil, în probabilitate, dacă* $\{f_n - M[f_n]\}$ *converge către zero în probabilitate.*

2. *Condiţii de stabilitate proprie:*

Teoremă. Fie $\{s_n(\xi)\}$ *un şir de variabile aleatorii aparţinînd spaţiului* L_2.

Dacă $\mu_n^2 = M[(s_n - M[s_n])^2] \to 0$ *cînd* $n \to \infty$, *şirul este propriu stabil, în probabilitate.*

Pentru demonstraţie, observăm doar că însăşi condiţia $\mu_n \to 0$ caracterizează un şir propriu stabil în medie de ordinul al doilea, ceea ce atrage convergenţa în probabilitate.

Putem verifica şi direct, prin aplicarea inegalităţii lui Cebîşev:

$$P(\{\xi \mid |s_n(\xi) - M[s_n]| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\mu_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Potrivit ipotezelor, aceasta tinde căre zero, de unde stabilitatea.

Tot aşa de evidentă este şi următoarea

Teoremă a lui Cebîşev. Dacă $f_n(\xi) \in L_2$ şi

$$M_2\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j - M\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j\right]\right] \to 0, \qquad (1)$$

atunci şirul

$$s_n(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j(\xi)$$

este propriu stabil, în probabilitate.

Condiţia dată arată că şirul este propriu stabil în medie de ordinul al doilea. El este deci propriu stabil şi în probabilitate.

Pentru aplicaţiile acestei teoreme vom deosebi cazul în care *variabilele* f_n *sînt independente în totalitatea lor.*

In acest caz,

$$M_2\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n} f_j - M\left[\frac{1}{n}\sum f_j\right]\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1,2,\ldots,n} \mu_j^2, \qquad (2)$$

---

[1]) Folosim acest termen în loc de *„normal stabil"*, deoarece, în teoria probabilităţilor, atributul *normal* este legat de legea lui Gauss. Am numi, de exemplu, „normal stabil" un şir care aparţine domeniului de stabilitate al unui şir care converge către o variabilă gaussiană.

Scanned with OKEN Scanner

deci criteriul (1) se transformă în criteriul

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1,2,\dots,n}\mu_j^2\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{3}$$

Criteriul (3) este verificat în cazul şirurilor de variabile uniform mărginite $|f_n|\leq K$. Prin urmare, *mediile* $s_n(\xi)$ *ale unui şir de variabile uniform mărginite independente sînt variabile aleatorii propriu stabile.*

Evident, criteriul (3) este de asemenea verificat dacă variabilele şirului aparţin spaţiului L_2 şi au aceeaşi lege de repartiţie, deoarece în acest caz $\mu_1=\mu_2=\dots$ De unde propoziţia:

Mediile $s_n(\xi)$ *ale unui şir de variabile aparţinînd spaţiului* L_2 *şi avînd aceeaşi funcţie de repartiţie sînt variabile propriu stabile.*

3. *Şiruri de variabile dependente.* Dacă variabilele şirului nu sînt independente, criteriul (1) se exprimă cu ajutorul dispersiilor μ_j şi cu ajutorul corelaţiilor

$$\rho_{jh}=M[(f_j-M[f_j])(f_h-M[f_h])],$$

astfel

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1,2,\dots,n}\mu_j^2+\frac{2}{n^2}\sum_{j<h}\rho_{jh}\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{4}$$

Acest criteriu este evident satisfăcut dacă

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1,2,\dots,n}\mu_j^2\to 0,\quad \frac{1}{n^2}\sum_{j<h}\rho_{jh}\to 0. \tag{5}$$

In particular, dacă variabilele sînt două cîte două necorelate ($\rho_{jh}=0$), regăsim relaţia (3) ca singur criteriu de stabilitate.

Dăm aici o teoremă de stabilitate pentru cazul în care există corelaţie.

Teoremă. Dacă

$$|f_n(\xi)|<K,\quad \rho_{jh}=a(h-j)$$

şi

$$a(h-j)\to 0,$$

cînd $h-j\to\infty$, *mediile* $s_n(\xi)$ *sînt propriu stabile.*

Prima parte a criteriului (4) este evident satisfăcută. Să arătăm că este satisfăcută şi a doua parte.

λ fiind un întreg oarecare, numărul perechilor de valori j,h ($j,h=1,2,\dots,n$, $j<h$), pentru care $h-j<l$, este mai mic decît λn, iar numărul celor pentru care $h-j\geq l$ este mai mic decît n^2.

Pe de altă parte, dînd un ε arbitrar de mic, putem alege un λ_ε astfel ca

$$a(h-j)<\varepsilon$$

dacă $h-j>\lambda_\varepsilon$.

Să adăugăm şi observaţia că, în condiţiile date.

$$|\rho_{jh}|<K^2$$

Observăm acum că

$$\sum_{j<h}^{1,2,\ldots,n}\rho_{jh}=\sum_{h-j<\lambda_\delta}\rho_{jh}+\sum_{h-j\geq\lambda_\delta}\rho_{jh},$$

de unde, ţinînd seama de rezultatele precedente,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j<h}^{1,2,\ldots,n}\rho_{jh}<\frac{n\lambda_2 k^2}{n^2}+\frac{n^2\varepsilon}{n^2}=\frac{\lambda_\varepsilon k^2}{n}+\varepsilon,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j<h}^{1,2,\ldots,n}\rho_{jh}\leq\varepsilon.$$

4. *Condiţii de stabilitate pentru şiruri de variabile din spaţiul* L_1.

Propoziţia 1. Dacă $\{f_n(\xi)\}$ *este un şir de variabile independente din spaţiul* L_1 *şi care au aceeaşi funcţie de repartiţie, media* $s_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n}\delta_j$ *este propriu stabilă în sensul Bernoulli.*

Presupunem, pentru a simplifica scrisul, că $M[f_n]=0$. Rămîne să arătăm că funcţia caracteristică a variabilei s_n, care este

$$\varphi_{(n)}(u)=\left[\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\right]^n, \tag{6}$$

unde $\varphi(u)$ este funcţia caracteristică comună a variabilelor f_n, tinde către unitate cînd n tinde către infinit.

Deoarece există momentul de ordinul întîi, există derivata întîi a funcţiei $\varphi(u)=\varphi_1(u)+i\varphi_2(u)$, şi această derivată este o funcţie continuă ca şi $\varphi(u)$:

$$\varphi(u)=1+u(\varphi_1'(\theta_1 u)+i\varphi_2'(\theta_2 u)). \tag{7}$$

$$(0<\theta_1,\ \theta_2<1)$$

Prin urmare,

$$\varphi_{(n)}(u)=\left[1+\frac{u}{n}\left(\varphi_1'\left(\theta_1\frac{u}{n}\right)+i\varphi_2'\left(\theta_2\frac{u}{n}\right)\right)\right]^n.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_1'\left(\theta_1\frac{u}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\varphi_2'\left(\theta_2\frac{u}{n}\right)=0$$

pentru orice u finit, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{(n)}^{(u)}=\lim_{n\to\infty}e^{u\left(\varphi_1'\left(\theta_1\frac{u}{n}\right)+i\varphi_2'\left(\theta_2\frac{u}{n}\right)\right)}=1.$$

Propoziția 2. O teoremă a lui Hincin afirmă mai mult:

In condițiile propoziției 1, media este propriu stabilă în probabilitate.

Propoziția 3. Dacă

$$f_n(\xi)\in L_1$$

și

$$\lambda_n=M[\,|f_n-M[f_n]|\,]\to 0,$$

atunci f_n tinde în probabilitate către zero, cînd n tinde către infinit.

Vom presupune, pentru simplificare, $M[f_n]=0$. Știm că există

$$\lambda_n=\int_E |f_n|\,P(d\xi).$$

Prin urmare,

$$\varepsilon\int_{|f_n|\geq\varepsilon}P(d\xi)\leq\int_{|f_n|\geq\varepsilon}|f_n|\,P(d\xi)\leq\lambda_n,$$

de unde

$$P(\{\xi\,||f_n|\geq\varepsilon\})\leq\frac{\lambda_n}{\varepsilon},$$

deci

$$P(\{\xi\,||f_n|\geq\varepsilon\})\to 0$$

cînd $n\to\infty$. Lema este astfel demonstrată.

In particular, dacă f_n este media $s_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1,2,\ldots,n}g_j(\xi)$, propoziția 3 devine următoarea

Teoremă. Dacă

$$\Lambda_n=M[\,|s_n-M[s_n]|\,]\to 0 \qquad (I)$$

cînd $n\to\infty$, $s_n-M[s_n]$ tinde în probabilitate către zero.

§ 15. Legea numerelor mari

1. *Teorema de stabilitate proprie a frecvenței.* Dacă f_j reprezintă frecvența evenimentului A în experiența de rang j, probabilitatea acestui eveniment este p_j și această experiență este independentă de celelalte; f_j, f_k fiind independente, atunci se aplică propoziția I din paragraful precedent.

Se mai observă că

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1, 2, \ldots, n} f_j$$

este frecvența relativă în sistemul celor n experiențe. Pe de altă parte,

$$M[s_n] = \frac{1}{n} \sum M[f_j] = \frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n);$$

Teorema (I) ia atunci următoarea formă:

Frecvența este o variabilă propriu stabilă.

Dacă la fiecare experiență evenimentul are aceeași probabilitate, $p = p_1 = p_2 = \ldots = p_m = \ldots$, teorema de stabilitate ia forma cunoscută sub numele de

2. *Legea numerelor mari sau teorema lui Bernoulli: Frecvența tinde, în probabilitate, către* p:

$$P\left[\left|s_n - p\right| > \varepsilon\right] \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Vom demonstra și o *convergență tare* a frecvenței către p.

3. *Legea tare a numerelor mari. Teorema lui Cantelli.* Dacă punem

$$g_j(\xi) = f_j(\xi) - p \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

unde

$$f_j(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in A, \\ 0 & \xi \in \mathbb{C}A \end{cases}$$

și

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1, 2, \ldots, n} g_j(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1, 2, \ldots, n} f_j - p.$$

Vom avea

$$M_4[\sigma_n] = \frac{1}{n^4} \left[\sum_j M_4[g_j] + 6 \sum_{k \neq h} M[g_k^2 g_h^2] \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^4} \left[n + 6 \frac{n(n-1)}{2} \right] \leq \frac{S}{n^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, seria

$$\sum_{n=1,\ 2,\ldots} M_4 [\sigma_n]$$

este convergentă.

Dacă aplicăm *inegalitatea generalizată a lui Cebîşev*

$$P(|\sigma_n| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M_4 [\sigma_n]}{\varepsilon^4},$$

inegalitatea lui Boole ne dă

$$P(|\sigma_n| \leq \varepsilon, |\sigma_{n+1}| \leq \varepsilon, \ldots, |\sigma_{n+p}| \leq \varepsilon, \ldots) \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{j=n,\ n+1,\ldots} P(|\sigma_j| > \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{j=n,\ n+1,\ldots} M_4 [\sigma_j].$$

Deoarece $\sum_{j=n,\ n+1,\ldots} M_4 [\sigma_j]$ tinde către zero cînd n tinde către infinit, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(|s_n - p| \leq \varepsilon, |s_{n+1} - p| \leq \varepsilon, \ldots) = 1,$$

deci:

Frecvenţa tinde aproape sigur către probabilitate cînd n tinde către infinit.

Această propoziţie constituie *legea tare a numerelor mari.*

In cazul în care probabilitatea nu este constantă în diferitele experienţe, această teoremă ia următoarea formă:

Frecvenţa este o variabilă propriu stabilă, peste tot.

Demonstraţia este similară cu cea a teoremei precedente.

Pentru acest capitol se va vedea în special bibliografia de la cap. XIV.

CAPITOLUL V

REPARTIŢII LIMITĂ

Două tipuri de repartiţii sînt proeminente în teoria probabilităţilor şi în aplicaţiile ei: repartiţia sau, cum se spune adesea, legea lui Gauss şi legea lui Poisson.

Evenimentele la care se referă legea lui Gauss sînt localizate într-un spaţiu euclidian, ca mulţimi măsurabile ale acestui

spațiu. Probabilitatea unui atare eveniment este, în cazul unei singure dimensiuni,

$$P(A)=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_A e^{-\frac{h^2x^2}{2}}dx.$$

Legea lui Poisson localizează evenimentele numai în timp. Enunțul ei se poate prezenta astfel: probabilitatea ca un eveniment să se producă de k ori în intervalul de timp t este

$$P_{k,t}=e^{-at}\frac{(at)^k}{k!}.$$

Aceste două legi sînt diferite prin natura lor intimă și, firește, servesc la studiul unor categorii de fenomene foarte deosebite între ele.

Dar amîndouă au o importantă caracteristică comună: ele sînt repartiții limită de sume de variabile aleatorii independente.

Hincin a arătat, pentru spațiile cu o dimensiune, identitatea dintre aceste două clase de repartiții.

Repartițiile probabilistice ale evenimentelor naturale sînt, în general, rezultate fie din suprapunerea spațială a numeroase evenimente a căror repartiție individuală poate fi — în anumite limite — arbitrară, fie din repetarea în timp a unuia sau mai multor evenimente elementare, cu structură probabilistă simplă, în general discontinuă.

Repartițiile observabile direct pentru evenimentele naturale macroscopice sînt, astfel, limite de repartiții ale unor sume de variabile pentru structura cărora nu se cere decît o anumită uniformitate și care, în experiență, corespund unor variabile simple.

Din expresia care dă legile de repartiție ale variabilelor limită se constată că legea lui Gauss joacă un rol singular: cadrul general este dominat de repartițiile de tip Poisson, a căror suprapunere poate genera orice lege din această categorie.

Grupul de legi de care ne ocupăm a fost descoperit prin analiza unei proprietăți de asemenea comună tuturor și anume aceea de a fi indefinit divizibile. Sub acest aspect, repartițiile limită capătă o nouă valoare pentru unele aplicații, așa cum va fi lămurit în cele ce urmează.

Scanned with OKEN Scanner

Problema legilor de probabilitate limită poate purta numele lui Laplace, care i-a acordat un mare loc în preocupările sale. Dar Laplace şi continuatorii operei sale, ca Moivre şi şcoala rusă a lui Cebîşev şi Liapunov, au gravitat mai cu seamă în jurul condiţiilor care conduc, la limită, la legea lui Gauss, influenţaţi fiind de teoria erorilor de observaţie în care această lege este aplicabilă.

Abia în 1925, cu lucrările lui Paul Lévy, şi mai tîrziu, ale lui A. Hincin, de Finetti şi Feller, problema legilor limită a fost pusă cu preciziune şi complet rezolvată.

§ 1. Forma canonică a repartiţiilor limită

1. *Precizarea problemei.* Să considerăm un şir de variabile aleatorii $\{x_n\}$, fiecare dintre ele fiind o sumă de variabile independente

$$x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nl_n}, \quad l_n \to \infty \text{ cînd } n \to \infty.$$

Pentru ca problema existenţei unei limite a variabilei x_n să aibă sens şi să nu fie banală, trebuie să presupunem o anumită uniformitate pentru variabilele x_{nj}, cînd $n \to \infty$.

Vom preciza această uniformitate după cum urmează. Dacă $\varphi_{n_j}(u)$ este funcţia caracteristică a variabilei x_{nj} şi punem această funcţie sub forma comodă

$$\varphi_{nj}(u) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\, dF_{nj}(x), \tag{1}$$

$F_{n_j}(x)$ fiind funcţia de repartiţie corespunzătoare, fiind dat un ε şi un U, există un $N_{\varepsilon, U}$ astfel că, notînd cu

$$\alpha_{nj}^{(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\, dF_{nj}(x),$$

să avem

$$|\alpha_{nj}^{(u)}| < \varepsilon \tag{i}$$

pentru $|u| < U$, $j = 1, 2, \ldots, l_n$, dacă $n > N_{\varepsilon, U}$.

Cu alte cuvinte, x_{nj} tind uniform, în sens Bernoulli, către zero, cînd n tinde către infinit.

2. *Determinarea distribuțiilor limită.* Presupunem că x_n are o limită în sens Bernoulli, deci că

$$\varphi_n(u) \to \varphi(u)$$

uniform în orice interval $|u| < U$.

Funcția caracteristică a variabilei x_n este dată de egalitatea

$$\varphi_n(u) = \varphi_{n1}(u)\,\varphi_{n2}(u) \ldots \varphi_{nl_n}(u);$$

(1) și (i) arată că pentru n suficient de mare nici unul dintre factorii acestui produs nu se anulează cînd $|u| < U$. Prin urmare, putem scrie:

$$\ln \varphi_n(u) = \sum_j \ln [1 + \alpha_{nj}(u)]. \tag{2}$$

Se verifică, fără greutate, că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j \ln (1 + \alpha_{nj}) = \lim \sum_j \alpha_{nj}.$$

Astfel, știind că $\varphi_n(u)$ are ca limită funcția $\varphi(u)$, vom avea:

$$\ln \varphi(u) = \lim \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\, dF_{nj}(x). \tag{3}$$

Pentru a da o formă convenabilă expresiei din membrul al doilea, să considerăm funcția monotonă nedescrescătoare

$$H_n(x) = \sum_j \int_0^x \frac{z^2}{1+z^2}\, dF_{nj}(z), \tag{4}$$

care îngăduie să scriem (3) sub forma nouă

$$\ln \varphi(u) = \lim \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\, \frac{1+x^2}{x^2}\, dH_n(x). \tag{5}$$

Să observăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, dH_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nj}(x) = \alpha_n$$

este finită. Rezultă atunci, pentru (5), forma

$$\ln \varphi(u) = i\alpha_n u + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dH_n(x). \qquad (6)$$

Se demonstrează că funcţiile monotone $H_n(x)$ sînt uniform mărginite.

Potrivit teoremei lui Helly, există atunci un subşir $H_{n_s}(x)$ care converge către o limită $H(x)$, de asemenea monotonă nedescrescătoare, în toate punctele acesteia. Pentru acest şir avem:

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dH_{n_s}(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x).$$

Deoarece suma din membrul al doilea din (6) are ea însăşi o limită, rezultă că şi α_n are o limită bine determinată cînd $s \to \infty$ şi că, prin urmare, se obţine *formula lui P. Lévy:*

$$\ln \varphi(u) = i\alpha u + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x),$$

unde α este o constantă reală, iar $H(x)$ o funcţie monotonă nedescrescătoare. Dacă $H(x)$ are în punctul $x=0$ un salt egal cu μ^2, vom avea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) = \frac{1}{2}\mu^2 u^2 + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right]$$

sau, introducînd funcţia $G(x)$, egală cu $H(x)$ pentru $x \leq 0$, continuă în $x=0$ şi egală cu $H(x)-\mu^2$ pentru $x > 0$, obţinem forma definitivă

$$\ln \varphi(u) = i\alpha u - \frac{1}{2}\mu^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x). \qquad (7)$$

Lăsăm cititorului grija de a arăta că parametrii α şi μ^2 sînt unici, iar $G(x)$ este determinată, în afară de o constantă aditivă. Prin urmare, (7) dă o reprezentare canonică funcţiilor caracteristice ale repartiţiilor sumă.

Rămîne să arătăm că orice funcţie caracteristică astfel reprezentată corespunde unei repartiţii limită de sume uniforme în înţelesul fixat mai sus.

Demonstraţia acestui fapt se va da în paragraful următor. Vom arăta că orice funcţie reprezentată de (7) este funcţie caracteristică a unei variabile indefinit divizibile. Vom arăta de asemenea că orice atare variabilă este o limită în sens Bernoulli de sume în înţelesul precedent şi astfel va fi confirmată afirmaţia noastră.

§ 2. Repartiţiile indefinit divizibile

1. *Definiţie. O variabilă aleatorie* $x=f(\xi)$ *este indefinit divizibilă* dacă, *pentru fiecare n întreg, există n variabile independente* $x_{nj}=f_{nj}(\xi)$ *avînd aceeaşi repartiţie, a căror sumă este* x

$$x=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn}. \tag{1}$$

Consecinţa imediată a acestei definiţii este următoarea

Propoziţie. Variabilele indefinit divizibile sînt limite de sume de variabile independente în sensul dat la § 1.

Deci, repartiţiile indefinit divizibile sînt repartiţii limită în sensul dat la § 1.

2. *Funcţia caracteristică* $\varphi(u)$ *a unei variabile indefinit divizibile* este caracterizată prin următoarea proprietate, echivalentă cu definiţia de la 1:

Pentru orice n există o funcţie caracteristică $\varphi_n(u)$ astfel că

$$[\varphi_n(u)]^n=\varphi(u). \tag{2}$$

Potrivit propoziţiei de mai sus, o variabilă indefinit divizibilă este o variabilă limită. Vom avea deci pentru $\varphi(u)$ reprezentarea (7) din § 1.

Să considerăm acum două numere reale α, μ şi o funcţie monotonă nedescrescătoare $G(x)$, continuă în origine.

Se verifică imediat că $\varphi(u)$, dat de (7), § 1, este o funcţie caracteristică.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm mai întîi că $\varphi(u)$ nu este continuă şi că

$$\varphi(u) = e^{i\alpha u}\, e^{-\frac{1}{2}\beta^2 u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)}. \qquad (3)$$

Primii doi factori sînt funcţii caracteristice: $e^{i\alpha u}$ funcţia caracteristică a variabilei care ia valoarea α cu probabilitatea 1; $e^{-\frac{1}{2}\beta^2 u^2}$ funcţia caracteristică a unei variabile gaussiene cu valoarea medie 0 şi cu dispersia β^2. Pentru al treilea factor, pe care-l numim $\psi(u)$, ţinînd seamă de definiţia integralei Stieltjes, avem:

$$\psi(u) = \lim \text{unif } e^{\sum_j \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux_j}{1+x_j^2}\right) \frac{1+x_j^2}{x_j^2} [G(x_{j+1}) - G(x_j)]}, \qquad (4)$$

pentru un şir de diviziuni x_j $(j = -\infty, \ldots, +\infty)$, a căror normă

$$\delta = \sup (x_{j+1} - x_j)$$

tinde către zero şi pentru care intervalul $x_1 - x_{-1}$ $\ni \delta$ este simetric faţă cu originea.

Expresia din membrul al doilea din (3) este un produs de funcţii caracteristice de tip Poisson

$$e^{(e^{ix_j u} - 1)\, \alpha_j}$$

cu funcţii de forma degenerată $e^{i\beta_j u}$; prin urmare, este ea însăşi o funcţie caracteristică, iar limita uniformă a unei funcţii caracteristice este o funcţie caracteristică. Prin urmare, $\psi(u)$, deci $\varphi(u)$, sînt funcţii caracteristice.

Este acum evident că, luînd

$$\varphi_n(u) = [\varphi(u)]^{\frac{1}{n}},$$

adică $\alpha_n = \frac{\alpha}{n}$, $\beta_n = \frac{\beta}{\sqrt{n}}$, $G_n(x) = \frac{1}{n} G(x)$, obţinem de asemenea o funcţie caracteristică şi că

$$[\varphi_n(u)]^n = \varphi(u);$$

deci, $\varphi(u)$ este indefinit divizibilă.

Din (3) se constată imediat că funcţiile caracteristice

$$e^{i\alpha u}, \quad e^{-\frac{1}{2}\mu^2 u}, \quad e^{a(e^{iux} - 1)}$$

corespunzătoare, respectiv, unei variabile cu o valoare unică aproape sigură, unei variabile gaussiene sau unei distribuții Poisson, sînt cuprinse în (3) dacă particularizăm cele trei caracteristici α, β, $G(x)$.

3. *Concluzii.* Deoarece din § 1 rezultă că repartițiile limite de sume sînt indefinit divizibile, iar acestea din urmă sînt ele însele limite de sume, cele două clase sînt identice și expresiile (3) și (4) sînt valabile pentru orice distribuție limită.

Legile lui Gauss și Poisson ocupă printre acestea locul cel mai important. Aceste două legi limită diferă printr-o caracteristică importantă în legătură cu stabilitatea.

Suma a două variabile aleatorii gaussiene independente $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi)$ *este o variabilă gaussiană.*

In adevăr, dacă $M[x_1] = 0$, $M[x_2] = 0$, $M[x_1^2] = \mu_1^2$, $M[x_2^2] = \mu_2^2$, funcțiile caracteristice respective sînt

$$\varphi_1(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu_1^2 u^2}, \quad \varphi_2(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu_2^2 u^2},$$

iar funcția caracteristică a sumei $x_1 + x_2$ este $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, adică

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\mu^2 u^2}, \quad \mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2.$$

In același timp, însă, *suma a două variabile de tip Poisson nu este, în general, o variabilă de același tip.*

In adevăr, dacă

$$\varphi_1(u) = e^{a(e^{iau} - 1)}; \quad \varphi_2(u) = e^{b(e^{i\beta u} - 1)} \quad a > 0, \quad b > 0,$$

funcția caracteristică a sumei variabilelor corespunzătoare este

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2 = e^{a(e^{iau} - 1) + b(e^{i\beta u} - 1)},$$

care nu poate fi pusă sub forma Poisson decît dacă $\alpha = \beta$.

Distribuțiile normale sînt deci *stabile* în totalitatea lor. Distribuțiile Poisson sînt stabile numai înlăuntrul familiilor care au același parametru α.

O teoremă inversă este însă comună celor două distribuții.

Teorema lui Cramer. Dacă o variabilă aleatorie gaussiană este suma a două variabile aleatorii independente, fiecare dintre ele este o variabilă gaussiană generalizată, în sensul următor:

Dacă

$$\varphi_1(u)\,\varphi_2(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu^2 u^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$\varphi_1(u)=e^{i\alpha u-\frac{1}{2}\mu_1^2u^2}\quad;\quad \varphi_2(u)=e^{-i\alpha u-\frac{1}{2}\mu_2^2u^2}$$

cu $\mu_1^2+\mu_2^2=\mu^2$ și α un parametru real arbitrar.

Această teoremă are, în afară de însemnătatea ei teoretică, și una aplicată, așa cum am arătat în studiul unor probleme de statistică stelară publicate în tratatul nostru de teoria probabilităților, în curs de apariție; în acest tratat se găsește și demonstrația teoremei următoare:

Teorema lui Gnedenko. Dacă o variabilă aleatorie de tip Poisson este suma a două variabile aleatorii independente, fiecare dintre ele este o variabilă de tip Poisson generalizat.

Adică, dacă

$$\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)=e^{a\,(e^{iau}-1)}\qquad (a>0),$$

atunci

$$\varphi_1(u)=e^{i\beta u+a_1\,(e^{iau}-1)},\quad \varphi_2(u)=e^{-i\beta u+a_2\,(e^{iau}-1)},$$

unde β este real și arbitrar, iar $a_1>0$, $a_2>0$, $a_1+a_2=a$.

4. *Repartiții indefinit divizibile cu mai multe dimensiuni.* Repartiția gaussiană este, prin natura ei, localizată spațial, de aceea forma acestei repartiții pentru un spațiu euclidian cu n dimensiuni sau pentru spații vectoriale mai generale s-a studiat în chip natural. Pentru repartiția Poisson, care este localizată în timp, extensiunile au fost mai puțin bogate. Observînd însă că într-o repartiție Poisson intervine o frecvență reprezentată de un număr întreg și că există evenimente complexe în care componentele au frecvențe diferite, se deschide calea pentru generalizarea repartițiilor Poisson și calea cercetării repartițiilor indefinit divizibile cu mai multe variabile.

Pentru acest capitol se va vedea bibliografia de la cap. VI.

CAPITOLUL VI

LEGEA LUI LAPLACE-GAUSS

Legea lui Laplace-Gauss, denumită, în genere, cu numele ultimului, este legea centrală a calculului probabilităților, deși în expresia în care apare ca lege limită este o repartiție singulară.

Problema legii lui Gauss are două formulări deosebite.

Cea dintîi ține de încadrarea acestei legi în problema generală a legilor limită și constă în a cere condițiile necesare și suficiente, pentru variabilele $x_{nj}=f_{nj}$, pentru ca sumele $s_n=\sum_{j=1,2\ldots,n_k} x_{nj}$ să conveargă, în sens Bernoulli, către o variabilă gaussiană.

Această problemă prezintă un interes teoretic precumpănitor. Formularea condițiilor aparține lui A. Hincin și constă într-o întărire a condițiilor de uniformitate care au servit la definirea clasei tuturor legilor limită.

Condiția necesară și suficientă pentru ca s_n să aibă la limită o repartiție gaussiană este ca

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1,2,\ldots,n_k} P(\{\xi \,|\, |f_{nj}| \geqq \varepsilon\}) = 0.$$

Această condiție simplă ne arată cît de bogat este domeniul în care legea limită este gaussiană și explică rolul important pe care l-a jucat în istoria dezvoltării teoriei probabilităților, precum și aplicațiile numeroase ale acestei legi.

A doua formulare este cea pe care o putem numi clasică. Ea face obiectul părții întîi a acestui capitol. In partea a doua, vom da condiții pentru o lege a lui Gauss relativă la *variabilele cu mai multe dimensiuni* și vom examina problema convergenței către legea lui Gauss *a sumelor de variabile înlănțuite.*

§ 1. Problema clasică în forma generală

1. *Șirul sumelor parțiale.* Se consideră un șir de variabile aleatorii independente $\{x_n\}$ $(n=1, 2,\ldots)$, funcțiile lor de repartiție $F_n(a)$ și funcțiile caracteristice corespunzătoare $\varphi_n(u)$.

Dacă numim cu $G_n(a)$ funcția de repartiție a sumei

$$s_n=\sum_{l=1,2,\ldots,n} x_l,$$

iar

$$s_n=s_{n-1}+x_n,$$

variabila x_n fiind independentă de s_{n-1}, atunci $G_n(a)$ sînt legate prin relația de compoziție

$$G_n(a)=\int_{-\infty}^{\infty} G_{n-1}(a-\alpha)\,dF_n(\alpha). \qquad (1)$$

Notînd cu $\psi_n(u)$ funcţia caracteristică a variabilei s_n, avem în corespondenţă cu (1) relaţia

$$\psi_n(u)=\psi_{n-1}(u)\,\varphi_n(u)=\prod_{j=1,\ldots,n}\varphi_j(u).$$

Şirul s_n este convergent în sens Bernouili dacă $G_n(a)$ converge către o funcţie de repartiţie $G(a)$ sau, ceea ce este echivalent, dacă $\psi_n(u)$ converge către o funcţie caracteristică $\psi(u)$.

Funcţia de repartiţie $G(a)=\lim G_n(a)$, ca şi $\psi(u)=\lim \psi_n(u)$, nu aparţine în general clasei funcţiilor limită definite în cap. V.

Orice repartiţie poate fi obţinută ca o limită în acest sens. Pentru a demonstra această afirmaţie, nu avem decî să considerăm şirul $\{x_n\}$ format astfel:

$$x_n=f_n(\xi)=\begin{cases}1 & \text{pe } E_n' \text{ cu } P(E_n')=1,\\ \text{alte valori} & \text{pe } E-E_n' \text{ cu probabilitatea zero,}\end{cases}$$

x_k fiind o variabilă aleatorie cu funcţia de repartiţie $F_k(a)$. Vom avea evident

$$\lim_{n\to\infty} G_n(a)=F_k(a),\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n(u)=\varphi_k(u),$$

deoarece $\varphi_n(u)=1$ pentru $n\neq k$.

2. *Normarea sumelor* s_n. Nu convergenţa acestui şir interesează. Aşa cum rezultă din numeroasele probleme puse de experienţă, şirurile s_n sînt în general divergente. Pentru ca problema să capete sens, aşa cum vom vedea şi în cazurile speciale pe care le vom trata, sumele s_n trebuie să fie normate. Cu această completare problema se formulează astfel:

Fiind dat şirul de variabile aleatorii $\{x_n\}$, *să se determine un dublu şir de numere de normare* $\{a_n\}$, $\{\mu_n\}$, *din care ultimele pozitive, astfel ca variabila normată*

$$\sigma_n=\frac{s_n-a_n}{\mu_n}$$

să fie convergentă, în sens Bernoulli, deci ca funcţia ei caracteristică $\chi_n(u)=e^{-i\frac{a_n u}{\mu_n}}\psi_n\left(\frac{u}{\mu_n}\right)$ *să convergă către o funcţie caracteristică* $\chi(u)$.

Căutăm condiţiile ca $\chi(u)$ să fie o funcţie limită în sensul dat la cap. V.

Notînd

$$x_{nj}=\frac{x_j}{\mu_n}-\frac{a_n}{nb_n},$$

rezultă

$$\sigma_n=\sum_{j=1,\ 2,\ \ldots,\ n} x_{nj}.$$

Vom fi în condițiile arătate la cap. V dacă variabilele x_{nj} tind uniform către zero în sens Bernoulli.

Pentru aceasta, se cere mai întîi, cum este evident, ca factorul de normare μ_n să tindă către infinit o dată cu n.

Problema astfel pusă a fost rezolvată în întregime de W. Feller, A. Hincin și P. Lévy, folosind criteriul de uniformizare al lui Lindeberg.

Rezultatul este că, în general, *dacă există convergență, limita, în afară de cazuri de excepție, este gaussiană.*

In paragrafele care urmează vom examina această problemă în formele care intervin mai des în aplicații și care sînt fie direct teorema de convergență a lui Liapunov, fie teorema lui Lindeberg.

§ 2. Teoreme de convergență

1. *Teorema lui Moivre-Laplace.* Dacă fiecare dintre variabilele șirului $x_n=f_n(\xi)$ $(n=1, 2,\ldots)$ este o variabilă simplă cu valorile 1 și 0 avînd probabilitățile respective p și $q=1-p$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left\{\xi \mid \lambda_1 \leq \left|\frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\sum_{j=1,\ 2,\ \ldots,\ n} f_j(\xi)-np\right)\right| < \lambda_2\right\}\right]=$$

$$=\Phi(\lambda_2)-\Phi(\lambda_1), \qquad (1)$$

unde

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

Demonstrația este implicată în aceea a teoremei lui Liapunov.

Vom observa numai, pentru a stabili o legătură cu teorema numerelor mari, că (1) se mai poate scrie, simplificînd în același timp,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\lambda_2\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1,\ \ldots,\ n} x_j-p\right| < \lambda_1\sqrt{\frac{pq}{n}}\right]=\Phi(\lambda_2)-\Phi(\lambda_1),$$

ceea ce îngăduie a pune, pentru valori mari ale lui n,

$$P\left(x_2 \leq \frac{1}{2}\sum x_j - p < x_1\right) \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\, x_2\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\, x_1\right), \qquad (2)$$

formulă care dă o bună evaluare pentru membrul întîi, așa cum se poate constata fără greutate.

2. *Teorema lui Liapunov. Se consideră un șir de variabile aleatorii independente* $\{x_k\}$ *și se presupune că momentele*

$$m_k = M[x_k], \quad \mu_k^2 = [(x_k - m_k)^2], \quad \rho_k^3 = M[|x_k - m_k|^3]$$

există pentru fiecare k. *Dacă notăm:*

$$m_{(n)} = \sum_{k=1,\ldots,n} m_k, \quad \mu_{(n)}^2 = \sum_{k=1,2,\ldots,n} \mu_k^2, \quad \rho_{(n)}^3 = \sum_{k=1,2,\ldots,n} \rho_k^3,$$

$$s_n = \sum_{k=1,2,\ldots,n} x_k,$$

și avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{(n)}}{\mu_{(n)}} \to 0,$$

atunci repartiția variabilei

$$\frac{s_n - m_{(n)}}{\mu_{(n)}}$$

este gaussiană cînd n *tinde către infinit.*

Această teoremă este implicată de teorema mai generală a lui Lindeberg, așa cum vom vedea.

Iată, deocamdată, două aplicații simple ale teoremei lui Liapunov.

a) *Legea limită a frecvenței unei variabile.* Un eveniment A se produce într-o succesiune infinită de experiențe independente cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Frecvența evenimentului în experiența de rangul k este variabila x_k, susceptibilă de valorile 1 și 0 cu probabilitățile respective p_k, $q_k = 1 - p_k$.

In acest caz,

$$m_k = p_k, \quad \mu_k^2 = p_k q_k, \quad \rho_k^3 = p_k q_k (p_k^2 + q_k^2),$$

$$\mu_{(n)}^2 = \sum_k p_k q_k, \quad \rho_{(n)}^3 = \sum_k p_k q_k (p_k^2 + q_k^2) = \mu_n^2 - 2\sum_k p_k^2 q_k^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci,

$$\frac{\rho_{(n)}^3}{\mu_{(n)}^3} < \frac{1}{\left(\sum_k p_k q_k\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dacă $\sum_k p_k q_k$ este divergentă cînd n tinde către infinit, condiția lui Liapunov este îndeplinită, deci frecvența normată a evenimentului A urmează la limită legea lui Gauss.

Această teoremă este generalizarea imediată a *teoremei lui Moivre-Laplace.*

b) *Dacă variabilele* $\{x_k\}$ *au aceeași lege de repartiție și există momentele* $M[x_k]=m$, $M[(x_k-m)^2]=\mu^2$, $M[|x_k-m|^3]=\rho^3$ *atunci variabila*

$$\frac{s_n-nm}{\mu\sqrt{n}}$$

este asimptotic gaussiană.

In adevăr, în acest caz

$$m_{(n)}=nm, \quad \mu_{(n)}^2=n\mu^2, \quad \rho_{(n)}^3=n\rho^3,$$

deci condiția lui Liapunov este îndeplinită și teorema se aplică.

Să observăm că, pentru demonstrație, se presupune existența momentului de ordinul al treilea, în afară de primele două momente.

Sînt numeroase împrejurările în care nu cunoaștem decît momentele de primele două ordine. In aceste cazuri se poate aplica:

3. *Teorema lui Lindeberg. Presupunem că există primele două momente pentru fiecare dintre variabilele șirului și că* $M[x_k]=0$; *notînd*

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^2 &= M[x_k^2], \quad \mu_{(n)}^2=\sum_k \mu_k^2, \\ \lambda_{n,k}^{(\alpha)} &= \frac{1}{\mu_{(n)}^2} \int_{|x|<\alpha\mu_{(n)}} x^2\, dF_k(x), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dacă

$$\sum_k \lambda_{n,k}(\alpha) \to 0$$

cînd $n\to\infty$, *pentru orice* $\alpha>0$, *atunci variabila* $\frac{1}{\mu_{(n)}} s_n$ *este asimptotic gaussiană.*

Demonstrația acestei teoreme se poate găsi în Tratatul de calculul probabilităților, în curs de apariție.

Vom completa numai acest rezultat cu

Teorema lui Feller, care afirmă că *condiția* (3) *a lui Lindeberg este nu numai suficientă, ci și necesară, pentru normalitatea asimptotică.*

Ne mărginim aici să demonstrăm existența limitei gaussiene în următoarele împrejurări curent întîlnite în Fizică. Presupunem că:

a) *Există o constantă* A, astfel încît

$$|f_l(P)|<A. \tag{4}$$

Această mărginire uniformă a variabilelor $f_l(P)$, pentru orice $P\in\sum$, este sprijinită pe experiență deoarece mărimile fizice curente atașate unui sistem dat, inclusiv energia, nu depășesc anumite valori care depind de structura sistemului.

b) *Există o constantă* $B>0$, astfel că

$$M[(f_l-M(f_l))^2]>B^2. \tag{5}$$

Această ipoteză de uniformitate a componentelor este de asemenea adecvată condițiilor fizice obișnuite.

Vom demonstra următoarea

Teoremă restrînsă. Dacă condițiile a) *și* b) *sînt îndeplinite atunci* $\frac{S_n-M(S_n)}{\mu_{(n)}}$ *este asimptotic gaussiană.*

Notații. Variabilele fiind mărginite, există momente de toate ordinele. Vom folosi momentele de primele trei ordine

$$\left.\begin{aligned}\mu_l^2&=M([f_l-M(f_l)]^2),\\ \rho_l^3&=M(|f_l-M(f_l)|^3),\\ \mu_{(N)}^2&=\textstyle\sum_l\mu_l^2;\quad \rho_{(N)}=\sum_l\rho_l^3.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ținînd seamă de (6), găsim imediat:

$$\left.\begin{aligned}&\mu_l=k_lA, && \frac{B}{A}<k_l<1,\\ &\rho_l=h_lA, && 0<h_l<1,\\ &\mu_{(N)}=k_{(N)}A\sqrt{N}, && k_{(N)}^2=\frac{\sum k_l^2}{N}, \quad \frac{B}{A}<k_{(N)}<1,\\ &\rho_{(N)}=h_{(N)}A\sqrt[3]{N}, && h_{(N)}^3=\frac{\sum h_l}{N}, \quad 0<h_{(N)}<1.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Din aceste valori rezultă imediat

$$\frac{\rho_{(N)}}{\mu_{(N)}} = \frac{h_{(N)}}{k_{(N)}} N^{-\frac{1}{2}} < \frac{A}{B} N^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

inegalitate care arată că se poate aplica sumei $G_{(n)}(P)$ (§ 1) teorema lui Liapunov pentru $N \to \infty$.

Vom da totuşi şi demonstraţia directă.

Variabilele $G_l(P)$ fiind independente, dacă numim cu $\varphi_l(u)$ funcţia caracteristică a variabilei $f_l(P) - M[f_l]$ şi cu $\varphi_{(N)}(u)$ funcţia caracteristică a variabilei $G_{(N)}(P)$, vom avea:

$$\varphi_{(N)}(u) = \Pi \varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right), \tag{9}$$

unde

$$\varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right) = \int_S e^{i\frac{u}{\mu_{(N)}} g_l(P)}\, dP, \tag{10}$$

$\lambda(A)$ fiind probabilitatea, respectivă.

Deoarece, pentru orice u real,

$$e^{iu} = 1 + iu - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\theta u^3 \tag{11}$$

cu

$$0 < |\theta| < 1,$$

vom avea:

$$\varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right) = \int_S \left[1 + i\frac{u}{\mu_{(N)}} g_l(P) - \frac{1}{2}\frac{u^2}{\mu^2_{(N)}} g_l^2(P) + \frac{1}{3}\theta \frac{u^3}{\mu^3_{(N)}} g_l^3(P)\right] dP =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\mu_l^2}{\mu^2_{(N)}} u^2 + \frac{1}{3}\theta_l \frac{\rho_l^3}{\mu^3_{(N)}} u^3 = 1 - \omega_{l,N} \tag{12}$$

cu

$$\omega_{l,N} = \frac{1}{2}\frac{\mu_l^2}{\mu^2_{(N)}} u^2 - \frac{1}{3}\theta_l \frac{\rho_l^3}{\mu^3_{(N)}} u^3 \qquad |\theta_l| < 1.$$

Să considerăm un Θ oricît de mare, fix, şi

$$|u| < \Theta;$$

ţinînd seamă de (8), găsim:

$$|\omega_{l,N}| < \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{B^2}\Theta^2 + \frac{1}{3}\frac{A^3}{B^3}\frac{\Theta^3}{\sqrt{N}}\right). \tag{13}$$

Fiind dat $1>\alpha>0$, există deci un $N_{\theta,\alpha}$ astfel că

$$|\omega_{l,N}|<\alpha, \quad N\geq N_{\theta,\alpha}.$$

In aceste condiţii,

$$\ln\varphi_{(N)}(u)=\sum\ln\varphi_l\left(\frac{u}{\mu_{(N)}}\right)=\sum\ln(1-\omega_{l,N})=$$

$$=-\sum(\omega_{l,N}+\lambda_{l,N}\omega_{l,N}^2)$$

cu

$$0<\lambda_{l,N}<1.$$

Avem, mai întîi,

$$\sum\omega_{l,N}=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{3}\theta'\frac{A^3}{B^3}\frac{u^3}{\sqrt{N}} \qquad 0<|\theta'|<1$$

şi apoi

$$\sum_l\lambda_{l,N}\omega_{l,N}^2=\lambda_N\sum_l\omega_{l,N}^2, \qquad 0<\lambda_N<1.$$

Dar

$$\lambda_N\sum\omega_{l,N}^2=\lambda_N\sum\left(\frac{1}{4}\frac{k^4}{k_{(N)}^4}N^{-2}u^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9}\theta_l^2\frac{h_l^6}{k_{(N)}^6}N^{-3}u^3-\frac{1}{3}\theta_l\frac{k_l^2h_l^3}{k_{(N)}^5}N^{-\frac{5}{2}}u^5\right)=\frac{1}{4}\nu_N'\frac{1}{k_{(N)}^2}N^{-1}u^4+$$

$$+\frac{1}{9}\nu_N''\frac{h_{(N)}^3}{k_{(N)}^4}N^{-2}u^6-\frac{1}{3}\nu_N'''\frac{1}{k_{(N)}^3}N^{-\frac{3}{2}}u^5$$

cu

$$0<\nu_N', \ \nu_N'', \ \nu_N'''<1.$$

Prin urmare,

$$\ln\varphi_{(N)}(u)=-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}\theta'\frac{A^3}{B^3}N^{-\frac{1}{2}}u^3-\frac{1}{4}\frac{\nu_N'}{k_{(N)}^2}N^{-1}u^4+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\nu_N'''}{k_{(N)}^3}N^{-\frac{3}{2}}u^5-\frac{1}{9}\frac{\nu_N''}{k_{(N)}^3}N^{-\frac{3}{2}}u^6.$$

Şi, în cele din urmă,

$$\ln\varphi_{(N)}(u)=-\frac{1}{2}u^2+A_NN^{-\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

cu

$$A_N=\frac{1}{3}\theta'\frac{A^3}{B^3}u^3-\frac{1}{4}\frac{\nu_N'}{k_{(N)}^2}N^{-\frac{1}{2}}u^4+\frac{1}{3}\frac{\nu_N'''}{k_{(N)}^3}N^{-1}u^5-\frac{1}{9}\frac{\nu_N''}{k_{(N)}^5}N^{-1}u^6,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$|A_N| < \frac{1}{3}\frac{A^3}{B^3}\theta^3 + \frac{1}{4}\frac{A^2}{B^2}N^{-\frac{1}{2}}\theta^4 + \frac{1}{3}\frac{A^3}{B^3}N^{-1}\theta^5 + \frac{1}{9}\frac{A^3}{B^3}N^{-1}\theta^6.$$

Avem deci

$$\varphi_{(N)}(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2} e^{A_N N^{-\frac{1}{2}}}. \tag{15}$$

Dacă N este foarte mare, $\varphi_{(N)}(u)$ este foarte apropiată, pentru u verificînd relaţia (13), de $e^{-\frac{1}{2}u^2}$, funcţie caracteristică a distribuţiei gaussiene. Rezultă uşor că variabila $G_{(N)}(P)$ este asimptotic gaussiană.

§ 3. O teoremă limită pentru variabile vectoriale

Fie $v_l \equiv v_l(P)$ $(l=1, 2, \ldots, N)$ un sistem de N vectori definiţi pe un cîmp de probabilitate determinat $\{E, \mathcal{K}, P\}$ cu valori în spaţiul vectorial euclidian R^p.

Vom pune

$$w_l = v_l - M[v_l].$$

Fie $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots, X_{l_p}$ cele p componente ale vectorului $w_l(P)$ şi

$$\mu_{hk,l} = M[X_{lh}X_{lk}]; \quad \rho_{jhk,l} = M[|X_{lj}X_{lh}X_{lk}|]$$

$$h, k = 1, 2, \ldots, p; \quad l = 1, 2, \ldots, N; \quad j, h, k = 1, 2, \ldots, p.$$

Vom presupune

$$|X_{lq}| < A; \quad l = 1, 2, \ldots, N; \quad q = 1, 2, \ldots, p \tag{1}$$

şi că determinantul $|\mu_{h,k,N}| = d_N$, care va fi definit ulterior şi care este pozitiv ca discriminant al unei forme pătratice pozitive, nu se apropie de zero. Există, deci, o constantă pozitivă B astfel că

$$d_N > B^{2p} \quad (l = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Vom folosi aceleaşi notaţii ca în § 2 al acestui capitol:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{hk,l} &= k_{hk,l}A^2, & |k_{hk,l}| &< 1,\\
\rho_{jhk,l} &= h_{jhk,l}A^3, & |h_{jhk,l}| &< 1,\\
\mu_{hk,(N)} &= \sum \mu_{hk,l} = k_{hk,(N)}NA^2, & |k_{hk,(N)}| &< 1,\\
\rho_{jhk,(N)} &= \sum \rho_{jhk,l} = h_{jhk,(N)}NA^3, & |h_{jhk,(N)}| &< 1.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Conform definiției,

$$\varphi_l(u)=\varphi_l(u^1,\ u^2,\ u^3)=\int_E e^{i\sum_r X_{l,r}u^r}\,dP, \tag{4}$$

unde $u(u^1,\ u^2,\ u^3)$ este un vector avînd componentele $u^1,\ u^2,\ u^3$, E este spațiul și λ probabilitatea corespunzătoare.

Deoarece

$$e^{iX_{l,r}u^r}=1+i(X_{l,r}u^r)-\frac{1}{2}(X_{l,r}u^r)^2+\frac{\theta_l}{3}(X_{l,r}u^r)^3=$$

$$=1+i(X_{l,r}u^r)-\frac{1}{2}(X_{l,h}X_{l,k}u^hu^k)+\frac{\theta_l}{3}(X_{l,j}X_{l,h}X_{l,k}u^ju^hu^k),$$

formula (4) ne dă

$$\varphi_l(u)=1-\frac{1}{2}\mu_{hk,l}u^hu^k+\frac{1}{3}\theta_l\rho_{jhk,l}u^ju^hu^k,\quad |\theta_l|<1, \tag{5}$$

unde am suprimat semnul însumării față de indicii $j,\ h,\ k=(1,\ 2,\ldots,\ p)$.

Punem

$$\omega_l(u)=\frac{1}{2}\mu_{h,k,l}u^hu^k-\frac{1}{3}\theta_l\rho_{jhk,l}u^ju^hu^k, \tag{6}$$

$$\omega_{(N)}(u)=\sum\omega_l=\frac{1}{2}\mu_{hk,(N)}u^hu^k-\frac{1}{3}\theta'_l\rho_{jhk,(N)}u^ju^hu^k. \tag{7}$$

Forma pătratică $\mu_{hk,(N)}u^hu^k$ este suma a N forme pătratice strict pozitive după ipotezele noastre, este deci și ea strict pozitivă. Există, prin urmare, o transformare

$$u^r=\alpha^r_{N,s}v^s\quad (u=\alpha_N v \text{ în notație operațională}) \tag{8}$$

care aduce forma $\mu_{hk,(N)}u^hu^k$ la forma canonică

$$\mu_{hk,(N)}u^hu^k\equiv(v^1)^2+(v^2)^2+\ldots+(v^p)^2.$$

Dacă notăm cu δ_N determinantul transformării (8) și punem

$$d_N=|\mu_{hk,(N)}|,$$

vom avea, potrivit unei teoreme cunoscute,

$$1=d_N\delta_N^2. \tag{9}$$

Să observăm, în același timp, că efectuînd transformarea (8) direct în (4), produsul scalar $X_{l,r}u^r$ devine

$$X_{l,r}u^r = X_{l,r}\alpha^r_{N,s}v^s = Y_{l,s}v^s;$$

dacă punem

$$Y_{l,s} = \alpha^r_{N,s}X_{l,r}, \tag{10}$$

vectorul $w_{l,N}$, avînd pe $Y_{l,s}$ $(s=1, 2, \ldots, p)$ drept componente, este transformatul vectorului v_l prin transformarea reciprocă a lui (8):

$$Y_s = \alpha^r_{N,s}X_r. \tag{11}$$

Deoarece din (11) rezultă

$$\sum_1^N{}_l Y_{l,s} = \alpha^2_{N,s}\sum_1^N{}_l X_{l,r},$$

vectorul $u_N = \sum_l u_{l,N}$ se obține din $w_N = \sum_l w_l$ prin aceeași transformare.

Vom putea enunța acum teorema limită care se aplică în mecanica statistică pentru sume de mărimi vectoriale.

Dacă punem, folosind notațiile precedente,

$$F_N(\bar{x}) = \text{Prob}\{\bar{u}_N < \bar{x}\},$$

unde u_N se obține prin transformarea de normare (11) (normează forma pătratică $\mu_{hk,(N)}u^hu^k$) din $w_{(N)} = \sum_l w_l$, iar relația de ordine $u_N < x$ înseamnă că cele p componente ale vectorului u_N sînt respectiv mai mici decît componentele vectorului x, atunci

$$\lim_{N\to\infty} F_N(x) = G(x),$$

$G(x)$ fiind funcția de repartiție p dimensională, normată, a lui Gauss.

Pentru demonstrarea acestei teoreme, prima observație pe care o facem este că expresia funcției caracteristice (4) este aceeași fie că efectuăm asupra componentelor $X_{l,r}$ transformarea (8), fie că efectuăm asupra variabilelor u^r transformarea reciprocă (11). Prin urmare, funcția caracteristică a vectorului $v_{l,N}$ (cu componentele $Y_{l,s}$) este $\varphi_l(\alpha_N u)$.

Deoarece

$$\varphi_{(N)}(v) = \Pi\varphi_l(\alpha_N u), \tag{12}$$

ţinînd seamă de (5) şi (6)

$$\varphi_{(N)}(v)=\Pi(1-\omega_l(\alpha_N u)). \tag{13}$$

Potrivit cu (6) şi (7) şi cu fransformările efectuate, vom avea:

$$\sum \omega_l(\alpha_N v)=\frac{1}{2}[(v^1)^2+\ldots+(v^p)^2]-\frac{1}{3}\theta'_l\rho'_{jhk,(N)}v^jv^hv^k,$$

unde

$$\rho'_{jhk,(N)}\,v^jv^hv^k=\rho_{jhk,(N)}\,u^ju^hu^k,$$

în virtutea transformării $u=\alpha_N v$.

Ţinînd seamă de notaţiile de mai sus, găsim:

$$d_N=k_N A^{2p}N^p, \tag{14}$$

unde k_N este determinantul

$$k_N=|k_{hk,(N)}|.$$

Potrivit ipotezei noastre, există un C astfel că

$$k_N>C>0,$$

oricare ar fi N.

Din (14) găsim

$$\delta_N=\frac{1}{k_N}A^{-2p}N^{-\frac{p}{2}}, \tag{15}$$

Coeficienţii transformării (8) sînt deci de forma

$$\alpha^r_{N,s}=\alpha^r_{N,s}N^{-\frac{1}{2}}A^{-1},$$

unde $a^r_{N,s}$ sînt uniform limitaţi:

$$|\alpha^r_{N,s}|<a.$$

In adevăr, $\alpha^r_{N,s}$ sînt legaţi de $\mu_{hk,(N)}$ prin relaţii de forma

$$\mu_{hk,(N)}\alpha^h_{N,r}\alpha^k_{N,s}=\delta_{rs}$$ (simbolul lui Kronecker).

Inlocuind pe $\mu_{hk,(N)}$ prin $k_{hk,(N)}NA^2$ şi punînd

$$\alpha^r_{N,s}=N^{-\frac{1}{2}}A^{-1}a^r_{N,s},$$

rezultă relaţiile

$$k_{hk,(N)}\, a^h_{N,r}\, a^k_{N,s} = \delta_{rs},$$

unde $h_{hk,(N)}$ sint limitaţi în modul; deoarece forma pătratică corespunzătoare acestor coeficienţi este pozitivă şi ireductibilă, relaţiile precedente au soluţii determinate şi mărginite uniform în raport cu N.

Rezultă atunci că

$$\rho_{jhk,l}\, u^j u^h u^k = \rho_{jhk,l}\, \alpha^j_{N,r}\, \alpha^h_{N,s}\, \alpha^k_{N,u}\, v^r v^s v^u =$$

$$= \rho_{jhk,l}\, a^j_{N,r}\, a^h_{N,s}\, a^k_{N,u}\, N^{-\frac{3}{2}}\, v^r v^s v^u = N^{-\frac{3}{2}}\, \gamma_{r,s,u,l}\, v^r v^s v^u.$$

Pin urmare,

$$\omega_l(\alpha_N v) = \frac{1}{2}\, \mu_{hk,l}\, u^h u^k - \frac{N^{-\frac{3}{2}}}{3}\, \theta_l\, \gamma_{rsu,l}\, v^r v^s v^u, \qquad (16)$$

cu

$$|\gamma_{rsu,l}| < \gamma.$$

Cu această formă a lui $\omega_l(\alpha_N v)$, şi ţinînd seama de faptul că

$$\sum \omega_l(\alpha_N v) = \frac{1}{2}\,[(v^1)^2 + \ldots + (v^p)^2] + N^{-\frac{1}{2}}\, \delta_{jhk,(N)}\, v^r v^s v^u,$$

continuăm calculul ca în cazul $p=1$. Prin urmare,

$$\varphi_{(N)}(v) = e^{-\frac{1}{2}[(v^1)^2 + \ldots + (v^p)^2] + A_N N^{-\frac{1}{2}}}, \qquad (17)$$

unde A_N este mărginit.

Rezultă

$$\lim_{N \to \infty} \varphi_{(N)}(v) = e^{-\frac{1}{2}[(v^1)^2 + \ldots + (v^p)^2]},$$

convergenţa fiind uniformă în orice domeniu mărginit din spaţiul R^p al vectorului. Teorema este astfel demonstrată.

§ 4. Legi limită pentru frecvenţa unui eveniment într-un lanţ Markov constant

1. *Relaţia între funcţiile caracteristice ale frecvenţei unui eveniment.* Fie $E_1, E_2, \ldots, E_m$ evenimentele a căror succesiune constituie un lanţ Markov simplu constant cu probabilităţile de trecere p_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ satisfăcînd proprietăţile

$$p_{kj} \geqq 0, \quad \sum_k p_{jk} = 1 \quad (j, k=1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Fie $n_1, n_2, \ldots, n_m$ frecvenţa evenimentelor respective pentru şirurile de n evenimente care încep cu E_h. Vom avea, evident

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$$

şi

$$P_h^{(n)}(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \sum p_{hj} P_j^{(n-1)}(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_m). \tag{2}$$

Să considerăm ca variabilă aleatorie frecvenţa unuia dintre evenimente. Pentru simplitatea scrisului, vom presupune că acest eveniment este E_1.

Frecvenţa evenimentului E_1 este variabila care ia valoarea 1 pentru evenimentul E_1 şi valoarea 0 pentru celelalte evenimente.

Funcţia caracteristică a abaterii $n_1 - n\theta$ de la valoarea $n\theta$ a acestei variabile este

$$\varphi_h(n, u) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=1} P_h^{(n)}(n_1, n_2, \ldots, n_m)\, e^{i(n_1 - n\theta)u}. \tag{3}$$

Folosind relaţia (2), această relaţie devine

$$\varphi_h(n, u) = p_{h_1} e^{i(1-\theta)u} \varphi_1(n-1, u) + \sum_{j=2, 3, \ldots, m} p_{hj} e^{-i\theta u} \varphi_j(n-1, u). \tag{4}$$

Dacă numim cu T transformarea liniară $x' = Tx$, sau explicit

$$x'_h = \sum_k a_{hk} x_k \qquad (h, k=1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

unde

$$a_{h_1} = p_{h_1} e^{i(1-\theta)u}, \quad a_{hj} = p_{hj} e^{-i\theta u},$$
$$h = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 2, 3, \ldots, m,$$

§ 4. Legi limită pentru frecvența unui eveniment într-un lanț Markov constant

1. *Relația între funcțiile caracteristice ale frecvenței unui eveniment.* Fie $E_1, E_2, \ldots, E_m$ evenimentele a căror succesiune constituie un lanț Markov simplu constant cu probabilitățile de trecere p_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, m)$ satisfăcînd proprietățile

$$p_{kj} \geqq 0, \quad \sum_k p_{jk}=1 \quad (j, k=1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Fie $n_1, n_2, \ldots, n_m$ frecvența evenimentelor respective pentru șirurile de n evenimente care încep cu E_h. Vom avea, evident

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n$$

și

$$P_h^{(n)}(n_1, n_2, \ldots, n_m)= \\ =\sum p_{hj} P_j^{(n-1)}(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \ldots, n_m). \tag{2}$$

Să considerăm ca variabilă aleatorie frecvența unuia dintre evenimente. Pentru simplitatea scrisului, vom presupune că acest eveniment este E_1.

Frecvența evenimentului E_1 este variabila care ia valoarea 1 pentru evenimentul E_1 și valoarea 0 pentru celelalte evenimente.

Funcția caracteristică a abaterii $n_1-n\theta$ de la valoarea $n\theta$ a acestei variabile este

$$\varphi_h(n, u)=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=1} P_h^{(n)}(n_1, n_2, \ldots, n_m)\, e^{i(n_1-n\theta)u}. \tag{3}$$

Folosind relația (2), această relație devine

$$\varphi_h(n, u)=p_{h_1} e^{i(1-\theta)u}\varphi_1(n-1, u)+\sum_{j=2, 3, \ldots, m} p_{hj} e^{-i\theta u}\varphi_j(n-1, u). \tag{4}$$

Dacă numim cu T transformarea liniară $x'=Tx$, sau explicit

$$x'_h=\sum_k a_{hk}x_k \qquad (h, k=1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

unde

$$a_{h_1}=p_{h_1}e^{i(1-\theta)u}, \quad a_{hj}=p_{hj}e^{-i\theta u}, \\ h=1, 2, \ldots, m, \qquad j=2, 3, \ldots, m,$$

atunci vectorul $\varphi(n, u)$ de componente $\varphi_1(n, u)$, $\varphi_2(n, u), \ldots,$ $\varphi_m(n, u)$ se poate scrie

$$\varphi(n, u) = T^n \varphi(1, u), \tag{6}$$

componentele vectorului $\varphi(1, u)$ fiind $\varphi_l(1, u) = p_{l1} e^{i(1-\theta)u}$, $l = 1, 2, \ldots, m$.

2. Valorile proprii ale operatorului T sînt acele valori ale lui λ pentru care există un vector $Z(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, astfel că

$$TZ = \lambda Z. \tag{7}$$

Ele sînt, prin urmare, cele n rădăcini $\lambda_j(u)$ ale ecuației

$$D(\lambda, u) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \ldots & -a_{1m} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \ldots & -a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{m1} & -a_{m2} \ldots & \lambda - a_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Teoremă. Pentru fiecare $j = 1, 2, \ldots, m$ *avem* $|\lambda_j(u)| \leq 1$.

Ecuațiile (7) se pot scrie cu ajutorul componentelor vectorului propriu Z corespunzînd rădăcinii λ_j:

$$\sum_k a_{lk} z_k = \lambda_j z_l \qquad (l, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Dacă $|z_h|$ este cel mai mare dintre modulele $|z_k|$, vom avea:

$$|\lambda_j| |z_h| \leq \sum_k p_{hk} |z_k|,$$

de unde

$$|\lambda_j| \leq \sum_j p_{hk} \frac{|z_k|}{|z_h|} \leq \sum_k p_{hk} = 1.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Cînd $u = 0$, ecuația $D(\lambda, 0) = 0$ are cel puțin o rădăcină egală cu 1. Vom presupune că sistemul de evenimente $E_1, E_2, \ldots, E_m$ este final indecompozabil și că există o singură rădăcină de modul 1. Această rădăcină, pe care o numim $\lambda_1(u)$, este simplă cînd $u = 0$; prin urmare, este simplă și cînd u este suficient de aproape de zero.

3. *Despre iteratele operatorului* T. Să notăm cu A^{hk} minorul elementului $-a_{kh} + \lambda\delta_{kh}$ din determinantul $D(\lambda, u)$. Avem, evident,

$$\Delta(\lambda, u) = \sum_h (-a_{kh} + \lambda\delta_{kh}) A^{hk}(\lambda). \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Inlocuind pe λ cu λ_j, rezultă

$$\sum_h a_{kh}A^{hk}(\lambda_j)=\lambda_j A^{kk}(\lambda_j) \qquad (k=1,\ 2,\ldots,m),$$

care reprezintă numai o formă particulară a egalității mai generale

$$\sum a_{kh}A^{hl}(\lambda_j)=\lambda_j A^{kl}(\lambda_j) \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ldots,m) \tag{9}$$

pentru $j=1,\ 2,\ldots,m$.

A doua egalitate, pentru cazul $l\neq k$, rezultă din identitatea

$$\sum (a_{kh}-\lambda\delta_{kh})\, A^{kh}(\lambda)=0,$$

pentru orice λ, deci și pentru $\lambda=\lambda_j$.

Dacă presupunem că cele m rădăcini sînt distincte, putem scrie identitatea [1])

$$\sum_j \frac{A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}=\delta^{hl}, \tag{10}$$

unde

$$D'(\lambda_j)=\left[\frac{D(\lambda,\ u)}{\lambda-\lambda_j}\right]_{\lambda=\lambda_j}.$$

---

[1]) Demonstrația acestei identități se face în modul următor. Fie

$$A(\lambda)=\left\| \frac{A^{kh}}{D(\lambda)} \right\|$$

matricea inversă matricei $a=\|-a_{hk}+\lambda\delta_{hk}\|$. Avem evident

$$aA=I, \tag{e_1}$$

I fiind matricea unitară. Presupunem că toate rădăcinile ecuației $D(\lambda,\ u)=0$ sînt simple. Există atunci o matrice α astfel ca $\alpha^{-1}a\alpha=u$ să fie matricea diagonală:

$$\beta=\|(\lambda-\lambda_j)\,\delta_{jk}\|.$$

Egalitatea (e_1) ne dă

$$(\alpha^{-1}a\alpha)\,(\alpha^{-1}A\alpha)=I, \quad \text{deci} \quad \beta\alpha^{-1}A\alpha=I.$$

Pe de altă parte,

$$\beta^{-1}=\left\| \frac{\delta_{jk}}{\lambda-\lambda_j} \right\|, \quad \text{deci} \quad A=\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1},$$

Inmulțind în ambii membri din (10) cu a_{kh}, însumînd față de h și ținînd seamă de (9), găsim:

$$a_{kl}=\sum_j \lambda_j \frac{A^{kl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \tag{11}$$

Inmulțind în (11) ambii membri cu a_{hk}, însumînd față cu k și ținînd seama de (9), obținem:

$$\sum_k a_{hk}a_{kl}=\sum_j \lambda_j^2 \frac{A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}.$$

Continuînd, obținem:

$$a_{hl}^{(n)}=\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} a_{hk_1}, a_{k_1k_2}\ldots a_{k_{n-1}l}=\sum_j \lambda_j^n \frac{A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \tag{12}$$

De unde

$$\varphi_h(n, u)=\sum_h a_{hl}^{(n)}=\sum_j \lambda_j^n \frac{\sum_l A^{hl}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}. \tag{13}$$

Cînd $u\to 0$, $\lambda_1(u)\to 1$, iar celelalte rădăcini tind către valori al căror modul este mai mic decît 1, astfel încît pentru u suficient de mic

$$\varphi_h(n, u)=A_h\lambda_1^n(u)+\chi_h(n, u), \tag{14}$$

---

de unde

$$(\lambda-\lambda_j)A=\alpha(\lambda-\lambda_j)\beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Dar

$$\{(\lambda-\lambda_j)A\}_{\lambda\to\lambda_j}=\left\{\left\|\frac{A^{kh}}{\frac{D(\lambda)}{\lambda-\lambda_j}}\right\|\right\}_{\lambda\to\lambda_j}=\left\|\frac{A^{kh}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}\right\|.$$

Dacă notăm cu i_j matricea care are toate elementele nule afară de cel din linia și coloana j care este 1, observăm că $\{(\lambda-\lambda_j)\beta^{-1}\}_{\lambda=\lambda_j}=i_j$. Prin urmare,

$$\left\|\frac{A^{kh}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}\right\|=\alpha i_j\alpha^{-1}.$$

Insumînd față cu j și observînd că $\sum i_j=I$, rezultă:

$$\left\|\sum\frac{A^{kh}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)}\right\|=I.$$

unde, chiar dacă unele dintre rădăcinile $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ devin egale între ele,

$$\chi_h(n, u) \to 0$$

cînd $n \to \infty$.

In (13) avem

$$A_h(u) = \frac{1}{D'(\lambda_j)} \sum_l A^{hl}(\lambda_1). \tag{15}$$

Se verifică imediat că, din expresia determinantului $D(\lambda, u)$ — calculîndu-l mai întîi prin dezvoltarea sa după elementele coloanei l și apoi după elementele aceleiași coloane, după ce le-am adăugat elementele celorlalte coloane — rezultă

$$A_h(0) = 1. \tag{16}$$

Pe de altă parte, ținînd seama că $\lambda_1(u)$ este rădăcină simplă pentru $u=0$ și deci că, în vecinătatea acestei valori, $\lambda_1(u)$ este analitică, vom avea:

$$\lambda_1(u) = 1 + u\lambda_1'(0) + \frac{1}{2} u^2 \lambda_1''(0) + \ldots$$

Putem scrie, evident

$$D(\lambda_1, u) = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{i(\theta-1)u} - p_{11} & -p_{12} & \cdots & -p_{1m} \\ -p_{21} & \lambda_1 e^{i\theta u} - p_{22} & \cdots & -p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{m1} & -p_{m2} & \cdots & -\lambda_1 e^{i\theta u} - p_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Derivăm în raport cu u și facem $u=0$; obținem:

$$\lambda_1'(0) = \sum_l P_l - i(1-\theta) P_1 + i\theta \sum_{k=2, 3, \ldots, m} P_l = 0, \tag{18}$$

unde P_l este minorul elementului $\lambda_1 e^{i\theta u} - p_{ll}$ după ce facem $u=0$. Dacă adoptăm pentru θ valoarea determinată

$$\theta = \frac{P_1}{\sum_l P_l}, \tag{19}$$

depinzînd numai de probabilitățile p_{jk}, avem după (17), $\lambda_1'(0) = 0$.

Derivăm de două ori în raport cu u relația (17), în care θ are valoarea dată de (19), și obținem valoarea $\lambda_1''(0)$.

4. *Repartiția limită cînd* $\lambda_1''(0) \neq 0$. Prin împărțirea cu $\sqrt{n}$, normăm abaterea $n_1 - n\theta$. Funcția caracteristică a acestei abateri reduse $\frac{n_1 - n\theta}{\sqrt{n}}$ este

$$\varphi\left(n, \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = A_h\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{\lambda_1''(0)}{2}\frac{u^2}{n} + \ldots\right)^n.$$

Cînd $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(n, \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = e^{\frac{1}{2}\lambda_1''(0)u^2}.$$

Membrul al doilea, limită de funcții caracteristice, are modulul cel mult egal cu 1, pentru orice n; deci, $\lambda_1''(0) < 0$, dacă bine înțeles condiția $\lambda_1'' \neq 0$ este verificată. De unde

Teorema. Frecvența redusă a unui eveniment oarecare dintr-un lanț Markov de evenimente urmează la limită legea lui Gauss, dacă $\lambda_1''(0) \neq 0$.

5. *Repartiția limită cînd* $\lambda_1''(0) = 0$. Presupunem, ca și în aliniatele precedente, că singura rădăcină al cărei modul este unu este aceea care tinde către unu cînd u tinde către zero.

Se verifică imediat că, în acest caz, momentul de ordinul al doilea este mărginit, deci $\varphi(n, u)$ reprezintă, cînd n tinde către infinit, funcția caracteristică a unei legi de probabilitate. Aceasta arată că există o rădăcină avînd ca modul unitatea. Aceasta este evident $\lambda_1(u) = 1$.

Din (14) rezultă atunci că funcția caracteristică a abaterii frecvenței $n_1 - n\theta$ este, cînd $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_h(n, u) = \frac{1}{D'(1)} \sum_l A^{ll}(1, u),$$

observînd că $A^{ll}(1, u)$ sînt efectiv funcții de u.

§ 5. Repartițiile lui Gnedenko

1. *Sume de variabile aleatorii independente, cu valori întregi.* Presupunem că toate funcțiile șirului de variabile independente $x_1 = f_1(\xi)$, $x_2 = f_2(\xi), \ldots, x_n = f_n(\xi), \ldots$, au aceeași repartiție:

$$q_l = P[x_n = \alpha + l\delta] \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

oricare ar fi n.

Vom presupune cu A. I. Hincin că repartiția (1) are momente absolute de primele cinci ordine

$$M_r = \sum_l |\alpha + l\delta|^r q_l \qquad (r = 1, 2, 3, 4, 5),$$

ceea ce înseamnă că funcția caracteristică respectivă

$$\varphi(u) = \sum_{l=0, \pm 1, \ldots} q_l e^{i(\alpha + l\delta)u}$$

are derivate de primele cinci ordine:

$$\varphi^{(r)}(u) = i^r \sum_l (\alpha + l\delta)^r q_l e^{i(\alpha + l\delta)u}.$$

Suma

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

a primelor n variabile va avea și ea valori întregi de forma

$$s_n = n\alpha + L\delta \quad , \quad (L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n)$$

cu $L = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Funcția ei caracteristică este egală cu $[\varphi(u)]^{(n)}$. Prin urmare, dacă punem

$$P_L^{(n)} = P(s_n = n\alpha + L\delta),$$

vom avea:

$$P_L^n = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\delta}}^{+\frac{\pi}{\delta}} e^{-iu(n\alpha + L\delta)} [\varphi(u)]^n du.$$

O evaluare pe care nu o mai reproducem aici ne dă următorul rezultat

$$P_L^n = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi n\lambda}} e^{-\frac{[n(\alpha-\theta)+\delta L]^2}{2n\lambda}} + \frac{\mu_0 + \mu_1 [n(\alpha-\theta)+\delta L]}{n^{\frac{3}{2}}} + 0\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} + |n(\alpha-\theta)+\delta L|^3}{n^{\frac{5}{2}}}\right),$$

unde

$$\theta = M[x_n] = \sum_l (\alpha + \delta l) q_l \tag{2}$$

$$\lambda = M[(x_n - \theta)^2] = \sum_l (\alpha - \theta + \delta l)^2 q_l \qquad (l = \theta, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

μ_0 și μ_1 fiind constante absolute.

Formule de tipul (2) pot fi de mare utilitate pentru sisteme cuantice în care numărul n al componentelor nu este prea mare, şi, prin urmare, nu putem vorbi despre o teoremă limită propriu-zisă şi cu atît mai puţin despre repartiţie gaussiană.

2. *Sume de vectori întregi independenţi, cu coordonate întregi.* Suma

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

a primilor n termeni ai şirului de vectori cu două dimensiuni

$$v_1(x_1, y_1), \quad v_2(x_2, y_2), \ldots, v_n(x_n, y_n), \ldots,$$

presupuşi independenţi, avînd aceleaşi valori, în reprezentare

$$x = \alpha + al + bm$$

$$y = \beta + cl + dm$$

$$\delta = ad - bc > 0, \qquad l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

şi aceeaşi repartiţie

$$P(x_n = \alpha + al + bm,\ y_n = cl + dm) = p_{lm}$$

este de asemenea un vector $S_n(X_n, Y_n)$ ale cărui componente au valori întregi

$$\begin{aligned} X_n &= n\alpha + aL + bM \\ Y_n &= n\beta + cL + dM \end{aligned} \qquad (L, M = 0, \pm 1, \ldots),$$

Dacă funcţia caracteristică comună a vectorilor v_n este

$$\varphi(u, v) = \sum_{l, m} p_{lm} e^{i[u(\alpha + al + bm) + v(\beta + cl + dm)]},$$

funcţia caracteristică a vectorului S_n este

$$[\varphi(u, v)]^n = \sum_{L, M} p_{LM}^{(n)} e^{i[u(n\alpha + aL + bM) + v(n\beta + cL + dM)]}$$

şi, prin urmare,

$$P_{LM}^{(n)} = \frac{\delta}{4\pi^2} \int_D e^{-i[u(n\alpha + aL + bM) + v(n\beta + cL + dM)]} [\varphi(u, v)]^n \, du \, dv, \qquad (3)$$

unde domeniul de integrare este definit de inegalităţile

$$-\pi < au + cv < \pi$$

$$-\pi < bu + dv < \pi.$$

Vom pune

$$\theta = M[x_n] = -i\left(\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} = \sum_{l,m} (\alpha + al + bm)\, p_{lm},$$

$$\sigma = M[y_n] = -i\left(\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} = \sum_{l,m} (\beta + cl + dm)\, p_{lm},$$

$$\lambda = M[(x_n-\theta)^2] = \sum_{l,m} (\alpha - \theta + al + bm)^2 p_{lm},$$

$$\mu = M[(y_n-\theta)^2], \quad \nu = M[(x_n-\theta)(y_n-\sigma)].$$

Dacă notăm

$$\xi_n = (\alpha-\theta)\, n + aL + bM,$$

$$\eta_n = (\beta-\sigma)\, n + cL + dM,$$

atunci o evaluare asimptotică a formulei (3) ne dă

$$P_{LM}^{(n)} = \frac{\delta}{2n\pi\sqrt{\Delta}}\, e^{-\frac{1}{2n\Delta}\left\{\mu\xi_n^2 - 2\nu\xi_n\eta_n + \lambda\eta_n^2\right\}} + \frac{h + k\xi_n + l\eta_n}{n^2} +$$

$$+ 0\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} + |\xi_n|^3 + |\eta_n|^3}{n^3}\right), \tag{4}$$

unde $\Delta = \lambda\mu - \nu^2 > 0$, h, k, l sînt trei constante.

BIBLIOGRAFIE

P. Laplace: Théorie analytique des probabilités, Oeuvrés, Paris, 1812.

* Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, издательство Академии наук СССР, М.-Л., 1947.

H. Poincaré: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

S. Poisson: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine wichtigen Anwendungen, Braunschweig, 1941.

P. Lévy: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1925.

H. Cramer: Über eine Eigenschaft der normalen Gesetz, Math. Zeitschrift. Bd. 41, 1936.

J. V. Lindeberg: Eine neue Herleitung der exponenzial Gesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschrift, Bd. 15, 1922.

P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

B. de Finetti: Sopra le funzioni a incrementi aleatori, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, Roma, 1929.

Scanned with OKEN Scanner

A. I. Hincin : Sopra il dominio di attrazione della legge di Gauss, Giornale Ist. Attuari, 1933.

А. Н. Хинчин : Предельные законы сумм независимых величин, ОНТИ, 1938.

W. Feller : Über den zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschrift, Bd. 40, 1935 und Bd. 42, 1937.

O. Onicescu și *Gh. Mihoc :* Calculul probabilităților, București, 1937.

O. Onicescu : Studii critice și cercetări, București, 1945.

Б. В. Гнеденко и *А. Н. Колмогоров :* Предельные законы для сумм независимых величин, Москва, 1947.

Т. А. Сарымсаков : Основы теории процессов Маркова, Москва, 1954

CAPITOLUL VII

REPARTIȚII POISSON

§ 1. Evenimente rare independente

1. *Studiul repartiției cu ajutorul timpului discontinuu. Proces omogen.* Considerăm o desfacere formată din evenimentele $E_n^{k\tau}$, care reprezintă faptul că un anume eveniment elementar se produce de n ori în intervalul de timp $k\tau$ ($\bigcup_{n=0,1,2,\ldots} E_n^{k\tau} = E$; $E_n^{k\tau} \cap E_m^{k\tau} = \Phi\ (n \neq m)$).

Vom pune

$$P(E_n^{k\tau}) = p_n^{(k\tau)} \quad k = 1, 2, \ldots; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ceea ce dă, evident,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(k\tau)} = 1.$$

Potrivit ipotezelor,

$$E_n^{(k+1)\tau} = \bigcup_{r=0}^{n} (E_r^{\tau} \cap E_{n-r}^{k\tau}). \tag{1}$$

Presupunem că evenimentele E_r *și* E_{n-2}^{k} *corespunzătoare intervalelor succesive* τ, $k\tau$ *sînt independente ;* deci,

$$p_n^{((k+1)\tau)} = \sum_{r=0}^{n} p_r^{(\tau)}\, p_{n-r}^{(k\tau)}. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, dacă introducem funcţia caracteristică

$$\varphi_{k\tau}(u)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(k\tau)}\, e^{inu}, \tag{3}$$

ecuaţia (2) ne dă imediat

$$\varphi_{k\tau}(u)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\tau)}\, e^{inu}\Big)^k.$$

Presupunem că $t=k\tau$ este dat. Rezultă

$$\varphi_{k\tau}(u)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\left(\frac{t}{k}\right)}\, e^{inu}\Big)^k.$$

Adăugăm următoarea *ipoteză*:

$$p_1^{\left(\frac{t}{k}\right)}=\frac{\omega t}{k}+0\left(\frac{t}{k}\right),\quad p_2^{\left(\frac{t}{k}\right)}=p_3^{\left(\frac{t}{k}\right)}=\ldots=0\left(\frac{t}{k}\right)^{1)},$$

ω fiind fix, cînd k variază.

Cu această ipoteză, (4) devine, pentru $k\to\infty$ şi t fix,

$$\varphi_t(u)=\lim_{k\to\infty}\left[1+\frac{\omega t}{k}(e^{iu}-1)\right]^k=e^{\omega t\,(e^{iu}-1)}. \tag{5}$$

Am expus acest procedeu care conduce repede la funcţia caracteristică a repartiţiei lui Poisson şi deci la probabilitatea

$$p_n(t)=e^{-\omega t}\frac{\omega^n t^n}{n!},$$

ca în intervalul t să se producă n evenimente elementare, deoarece este procedeul originar folosit în această problemă, în genere cunoscut şi întrebuinţat.

2. *Al doilea procedeu.* Notăm cu $E_m(t)$ evenimentul care constă în producerea în intervalul t a m evenimente elementare şi cu $p_m(t)=P(E_m(t))$ probabilitatea corespunzătoare.

Facem următoarele ipoteze:

a) independenţa evenimentelor $E_m(t)$, $E_l(\Delta)$ în intervalele succesive $(0, t)$ şi $(t, t+\Delta)$;

---

[1]) Potrivit unei convenţii, $0(u)$ este o funcţie de u cu proprietatea $\lim_{u\to 0}\frac{0(u)}{u}=0$.

b) raritatea evenimentelor

$$p_1(\Delta)=\omega\Delta+0(\Delta), \qquad p_m(\Delta)=0(\Delta) \qquad m>1,$$

$$p_0(\Delta)=1-\omega\Delta+0(\Delta).$$

Din egalitatea

$$E_n(t+\Delta)=\bigcup_r (E_r(\Delta)\,E_{n-r}(t)) \qquad (r=0,1,\ldots,n)$$

rezultă

$$p_n(t+\Delta)=\sum_{r=0}^{n} p_r(\Delta)\,p_{n-r}(t). \tag{7}$$

Dacă introducem funcţia caracteristică

$$\varphi(t;\ u)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\,e^{inu}, \tag{8}$$

relaţia (7) ne arată că

$$\varphi(t+\Delta, u)=\varphi(t, u)\,\varphi(\Delta t, u). \tag{9}$$

Insă, ţinînd seamă de ipoteza b, obţinem:

$$\varphi(\Delta t,\ u)=p_0(\Delta)+p_1(\Delta)\,e^{iu}+0(\Delta)=1+\omega\Delta\ (e^{iu}-1)+0(\Delta). \tag{10}$$

Prin urmare, (9) ne dă

$$\frac{\varphi(t+\Delta,\ u)-\varphi(t,\ u)}{\Delta}=\omega(e^{iu}-1)+\frac{0(\Delta)}{\Delta}.$$

De unde, făcînd $\Delta\to 0$, rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial\varphi(t,\ u)}{\partial t}=\omega(e^{iu}-1)\,\varphi(t,\ u), \tag{11}$$

a cărei integrală generală are forma

$$\varphi(t, u)=C(u)\,e^{\omega t\,(e^{iu}-1)}.$$

Din (10) rezultă că $\varphi(0,\ u)=1$, de unde $C(u)\equiv 1$, ceea ce dă soluţia găsită la § 1:

$$\varphi(t, u)=e^{\omega t\,(e^{iu}-1)}. \tag{12}$$

3. *Ecuaţiile diferenţiale ale probabilităţilor* $p_m(t)$. Din (7) făcînd mai întîi $n=0$, găsim

$$p_0(t+\Delta)=p_0(\Delta)\,p_0(t).$$

Folosind ipoteza b, obținem ecuația

$$\frac{p_0(t+\Delta)-p_0(t)}{\Delta} = -\omega p_0(t)$$

și la limită ecuația

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\omega p_0(t) \qquad (t>0)$$

cu condiția inițială, conform cu b, $p_0(0)=1$.

Soluția acestei ecuații este deci

$$p_0(t)=e^{-\omega t}. \tag{13}$$

Tot (7), pentru $n>0$, ne dă prin același procedeu, sistemul diferențial

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\omega p_n(t)+\omega p_{n-1}(t) \qquad (t>0). \tag{14}$$

$$p_n(0)=0, \qquad n=1,2,\ldots$$

Sistemul de soluții al acestui sistem este

$$p_n(t) = e^{-\omega t}\frac{\omega^n t^n}{n!}, \tag{15}$$

cum se stabilește ușor dacă în (14) facem în prealabil schimbarea

$$p_n(t)=e^{-\omega t}q_n(t).$$

4. *Proces variabil.* In acest caz trebuie să presupunem că $\omega=\omega(t)$ este o funcție de t. In aceste condiții, ecuația diferențială (11) are ca integrală funcția

$$\varphi(t,u)=e^{(e^{iu}-1)\int_0^t \omega(s)\,ds}. \tag{16}$$

iar probabilitățile respective au valoarea

$$p_n(t)=e^{-\Omega(t)}\frac{\Omega^n(t)}{n!}, \tag{17}$$

unde $\Omega(t)=\int_0^s \omega(s)\,ds$.

§. 2. Repartiția frecvențelor rare a mai multor evenimente elementare

1. *Condițiile procesului.* Pentru simplificarea scrierii, vom examina mai întîi numai cazul a două evenimente elementare. Evenimentul corespunzător intervalului de timp (t', t'')

este $E^{t', t''}_{m_1, m_2}$ [evenimentul e_1 se prezintă de m_1 ori, evenimentul e_2 se prezintă de m_2 ori, în același interval de timp (t', t'')].

Relația fundamentală pentru aceste evenimente este

$$E^{t_1, t+\Delta}_{m_1, m_2} = \bigcup_{\substack{k_1=0, 1, \ldots, m_1 \\ k_2=0, 1, \ldots, m_2}} (E^{t_0, t}_{k_1, k_2} \cap E^{t, t+\Delta}_{m_1+k_1, m_2-k_2}). \tag{1}$$

De unde, cu notația

$$P(E^{t', t''}_{m_1, m_2}) = p_{m_1, m_2}(t', t''),$$

obținem:

$$p^{(t_0 t+\Delta)}_{m_1, m_2} = \sum_{\substack{k_1=0, \ldots, m_1 \\ k_2=0, \ldots, m_2}} p_{k_1, k_2}(t_0, t_1) \cdot P(E^{t, t+\Delta}_{m_1-k_1, m_2-k_2} / E^{t_0, t}_{k_1, k_2}). \tag{2}$$

Presupunem

$$P(E^{t, t+\Delta}_{h_1, h_2} / E^{t_0, t}_{k_1, k_2}) = P(E^{t, t+\Delta}_{h_1, h_2}); \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} P(E^{t, t+\Delta}_{0, 0}) &= 1 - a(t)\Delta + \Delta 0(\Delta), \\ P(E^{t, t+\Delta}_{1, 0}) &= b(t)\Delta + \Delta 0(\Delta), \\ P(E^{t, t+\Delta}_{0, 1}) &= c(t)\Delta + \Delta 0(\Delta), \\ P(E^{t, t+\Delta}_{1, 1}) &= d(t)\Delta + \Delta 0(\Delta), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

și

$$P(E^{t, t+\Delta}_{h, k}) = \Delta 0(\Delta),$$

dacă unul cel puțin dintre indicii h și k este mai mare decît unu.

Observăm, ca și în cazul precedent, că avînd

$$\sum_{h, k=0, 1, 2 \ldots} P(E^{t, t+\Delta}_{h, k}) = 1,$$

rezultă

$$a(t) = b(t) + c(t) + d(t); \tag{5}$$

de asemenea,

$$b(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0, \quad d(t) \geq 0. \tag{6}$$

Vom presupune de asemenea că funcțiile $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ sînt integrabile în intervalul (t_0, T), oricare ar fi T.

2. *Ecuațiile diferențiale ale procesului.* Folosind condițiile (4) și (3) în relația (2), avem la limită pentru $\Delta \to 0$:

$$\frac{dp_{m_1, m_2}(t)}{dt} = -a(t)p_{m_1, m_2}(t) + b(t)p_{m_1-1, m_2}(t) + c(t)p_{m_1, m_2-1}(t) + d(t)p_{m_1-1, m_2-1}(t) \tag{7}$$

$$(m_1, m_2 = 1, 2, \ldots).$$

$$\frac{dp_{m_1, 0}(t)}{dt} = -a(t)p_{m_1, 0}(t) + b(t)p_{m_1-1, 0}(t) \tag{8}$$

$$(m_1 = 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{dp_{0, m_2}(t)}{dt} = -a(t)p_{0, m_2}(t) + c(t)p_{0, m_2-1}(t) \tag{9}$$

$$(m_2 = 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{dp_{0, 0}(t)}{dt} = -a(t)p_{0, 0}(t). \tag{10}$$

Se demonstrează imediat că există o soluție determinată și unică $p_{m_1, m_2}(t)$ a acestui sistem de ecuații, soluție care verifică condițiile inițiale

$$p_{m_1, m_2}(0) = 0$$

pentru $m_1, m_2 \neq (0, 0)$ și

$$p_{0, 0}(0) = 1.$$

Se constată că

$$p_{m_1, m_2}(t) \geq 0$$

și că $\sum_{m_1, m_2 = 0, 1, \ldots} p_{m_1 m_2}(t) = 1$. Soluția constituie deci sistemul de probabilități căutat.

3. *Funcția caracteristică.* Prin definiție,

$$\varphi(u_1, u_2; t) = \sum_{m_1 m_2}^{0, 1, \ldots} p_{m_1 m_2}(t)\, e^{i(a_1 u_1 m_1 + a_2 u_2 m_2)}. \tag{11}$$

Prin derivare în raport cu t,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a(t) \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} p_{m_1, m_2}(t)\, e^{i(a_1 u_1 m_1 + a_2 u_2 m_2)} + b(t)\, e^{i a_1 u_1} \varphi(t) + c(t)\, e^{i a_2 u_2} \varphi(t) + d(t)\, e^{i(a_1 u_1 + a_2 u_2)} \varphi(t),$$

adică

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left[a(t) + b(t)\, e^{i\alpha_1 u_1} + c(t)\, e^{i\alpha_2 u_2} + d(t)\, e^{i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}\right] \varphi(t);$$

prin urmare,

$$\varphi(u_1 u_2;\ t) = \varphi(0)\, e^{-\int_0^t [a(s) - b(s)\, e^{i\alpha_1 u_1} - c(s)\, e^{i\alpha_2 u_2} - d(s)\, e^{i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}]\, dt}.$$

Cum din (11) rezultă că $\varphi(u_1,\ u_2,\ 0) = p_{0,0}(0) = 1$, avem în definitiv

$$\varphi(u_1,\ u_2;\ t) = \exp\left[-\int_0^t [a(s) - b(s)\, e^{i\alpha_1 u_1} - c(s)\, e^{i\alpha_2 u_2} - d(s)\, e^{i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}]\, ds\right]. \tag{12}$$

Cu ajutorul acestei formule putem calcula în mod simplu probabilităţile $p_{m_1, m_2}(t)$, care verifică relaţiile (7), (8) (9) şi (10).

Relaţia (12) se mai poate scrie, ţinînd seamă de (5)

$$\varphi(u_1,\ u_2;\ t) = e^{(e^{i\alpha_1 u_1} - 1)\beta(t)}\, e^{(e^{i\alpha_2 u_2} - 1)\gamma(t)}\, e^{(e^{i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)} - 1)\delta(t)} \tag{13}$$

cu $\alpha(t) = \int_0^t a(s)\, ds$ etc.

Cazul mai multor evenimente elementare. Din relaţia (13) se vede imediat cum se generalizează expresia funcţiei caracteristice pentru cazul mai multor evenimente elementare:

$$f(u_1,\ u_2, \ldots, u_n;\ t) =$$

$$= \prod_1^m{}_k \exp(e^{i\alpha_k u_k} - 1)\, \beta_k(t) \prod_{h<k}{}^{h,\,k} \exp(e^{i(\alpha_h u_h + \alpha_k u_k} - 1)\, \beta_{kh}(t) \ldots$$

$$\ldots \exp(e^{i(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n)} - 1)\, \beta_{12\ldots n}(t), \tag{14}$$

unde am folosit notaţia $e^{\alpha} = \exp \alpha$ şi

$$\beta_k(t) = \int_{t_0}^t b_k(s)\, ds, \quad \beta_{kh}(t) = \int_{t_0}^t b_{kh}(s)\, ds, \ldots, \quad \beta_{12\ldots n}(t) = \int_{t_0}^t b_{12\ldots n}(s)\, ds.$$

Funcţiile b sînt toate pozitive şi mărginite în orice interval $t_0,\ t$.

Scanned with OKEN Scanner

4. *Valorile medii și corelația.* Din (31) rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{u_1=0,\ u_2=0} = i\alpha_1(\beta(t)+\delta(t)); \quad \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{u_1=0,\ u_2=0} = i\alpha_2(\gamma(t)+\delta(t)),\\
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\right)_{u_1=0,\ u_2=0} = -\alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]-\alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]^2,\\
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}\right)_{u_1=0,\ u_2=0} = -\alpha_2^2[\gamma(t)+\delta(t)]-\alpha_2^2[\gamma(t)+\delta(t)]^2,\\
&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\right)_{u_1=0,\ u_2=0} = -\alpha_1\alpha_2\delta-\alpha_1\alpha_2[\beta(t)+\delta(t)][\gamma(t)+\delta(t)].
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dacă notăm cu (x_1, x_2) variabila cu două dimensiuni care ia valorile $(\alpha_1 m_1, \alpha_2 m_2)$ $(m_1=0, 1, 2, \ldots; m_2=0, 1, 2, \ldots)$, vom putea scrie:

$$M[x_1]=\alpha_1[\beta(t)+\delta(t)]; \quad M[x_2]=\alpha_2[\gamma(t)+\delta(t)], \quad (16)$$

$$M[x_1^2]=\alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]+\alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]^2. \quad (17)$$

Deci,

$$\nu_{10}=M[[x_1-M[x_1]]^2]=\alpha_1^2[\beta(t)+\delta(t)]. \quad (18)$$

La fel

$$\nu_{01}=M[[x_2-M[x_2]]^2]=\alpha_2^2[\gamma(t)+\delta(t)]. \quad (19)$$

De asemenea,

$$M[x_1x_2]=\alpha_1\alpha_2\delta(t)+\alpha_1\alpha_2[\beta(t)+\delta(t)][\gamma(t)+\delta(t)]. \quad (20)$$

Coeficientul de corelație între aceste două variabile este

$$R=\frac{\delta(t)}{\sqrt{[\beta(t)+\delta(t)][\gamma(t)+\delta(t)]}}. \quad (21)$$

Observații. 1. Așa cum se vede din formula precedentă, $\delta(t)$ caracterizează corelația între cele două variabile. Dacă $\delta(t)\equiv 0$, ceea ce înseamnă $d(t)\equiv 0$, corelația între x_1 și x_2 este nulă. In acest caz, relația (13) arată că $f(u_1, u_2, t)$ se reduce la

$$f(u_1, u_2; t)=f_1(u_1, t)\cdot f_2(u_2, t) \quad (22)$$

cu

$$f_1(u_1, t)=\exp(e^{i\alpha_1 u_1}-1)\beta(t), \quad f_2(u_2, t)=\exp(e^{i\alpha_2 u_2}-1)\gamma(t),$$

deci x_1 și x_2 se comportă ca două variabile independente.

2. Al doilea caz particular de reținut este acela în care

$$b(t)=c(t)=0,$$

deci

$$R(t)=1.$$

In acest caz, din relația (13) rezultă

$$f(u_1,\ u_2;\ t)=\exp\left(e^{i(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)}-1\right)\delta(t).$$

Dacă luăm o sumă variabilă $v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$, avem:

$$f(u_1,\ u_2;\ t)=g(v,\ t)=\exp\left(e^{iv}-1\right)\delta(t);$$

variabilele sînt așa de legate, încît fenomenul se reduce la cel corespunzător unei singure variabile.

Aceste observații asupra cazurilor extreme pot servi în aplicațiile în care se folosește de schema de mai sus.

§ 3. O generalizare a procesului Poisson

1. *Definirea procesului.* Presupunem că *frecvența* unui eveniment elementar, într-un interval $\tau=\frac{t}{k}$, considerată ca variabilă aleatorie, are funcția caracteristică

$$\varphi_\tau(u)=1+(\omega\tau+0(\tau))(\psi(u)-1), \tag{1}$$

unde $\psi(u)$ este o funcție caracteristică.

Funcția caracteristică a frecvenței în intervalul $t=\tau k$ este

$$\varphi_t^{(k)}(u)=[\varphi_\tau(u)]^k=\left[1+\left[\frac{\omega t}{k}+0\left(\frac{t}{k}\right)\right](\psi(u)-1)\right]^k.$$

Dacă $\tau\to0$, deci $k\to\infty$, astfel ca $t=\tau k$ să rămînă fix, obținem:

$$\varphi_t(u)=e^{-\omega t}e^{\omega t\psi(u)}, \tag{2}$$

care corespunde *funcției de repartiție a lui Hincin:*

$$F(x)=e^{-a}\sum_{k=0,1,\ldots}\frac{\omega^k t^k}{k!}\Phi_k(x),$$

unde $\Phi_k(x)$ este definită prin compunerea distribuției $\Phi(x)$, corespunzătoare funcției de repartiție $\psi(u)$, după legea de compoziție

$$\Phi_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{k-1}(\xi)\,d\,\Phi_1(x-\xi),$$

corespunzătoare adunării variabilelor independente.

După expresia (1) a funcției caracteristice a frecvenței, rezultă că *numai valoarea zero are o probabilitate care, atunci cînd* $\tau\to0$, *rămîne diferită de zero.*

2. *Observație.* Este evident că pentru $\psi(u)=e^{iu}$ avem:

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0,\\ 1 & x>1,\end{cases}$$

deci regăsim distribuția clasică a lui Poisson.

Pentru procese variabile în timp, funcția caracteristică limită are forma

$$\varphi_t(u)=e^{-\Omega(t)}e^{\Omega(t)\psi(u)},$$

unde $\Omega(t)$ este o funcție reală și pozitivă care crește la infinit cu t.

§ 4. Evenimente rare dependente. Cazul unei singure frecvențe

1. *Schema procesului elementar.* Vom nota cu $E_m^{(t_1,t_2)}$ evenimentul care constă în faptul că, în intervalul de timp t_1, t_2, evenimentul elementar se produce de m ori. Vom avea:

$$E_m^{0,t+\Delta}=\bigcup_{k=0,1,\ldots,m}(E_k^{0,t}\cap E_{m-k}^{t,t+\Delta}) \quad (t\geq 0,\ \Delta\geq 0). \tag{1}$$

Notăm

$$P(E_m^{t_1,t_2})=p_m(t_1,\ t_2)$$

și

$$P(E_h^{t,t+\Delta}/E_k^{0,t})=p_{kh}(t,\ t+\Delta),$$

lăsînd neînregistrat în această notație momentul inițial 0, pe care-l considerăm fixat o dată pentru totdeauna.

Condițiile procesului elementar de tip Markov sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned}&p_{k0}(t,\ t+\Delta)=1-\Delta a_k(t,\ t+\Delta),\\ &p_{k1}(t,\ t+\Delta)=\Delta b_k(t,\ t+\Delta),\\ &p_{kh}(t,\ t+\Delta)=\Delta\cdot 0(\Delta)\quad (h=2,3,\ldots)\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

In aceste egalități, funcțiile pozitive $a_k(t,\ t+\Delta)$ și $b_k(t,\ t+\Delta)$ sînt presupuse continue față de argumentul al doilea; vom nota:

$$a_k(t)=\lim_{\Delta\to 0}a_k(t,\ t+\Delta),\quad b_k(t)=\lim_{\Delta\to 0}b_k(t,\ t+\Delta), \tag{3}$$

Se verifică imediat că

$$-a_k(t,\ t+\Delta)+b_k(t,\ t+\Delta)=0(\Delta);$$

prin urmare,

$$b_k(t)=a_k(t). \tag{4}$$

Vom presupune că funcţiile $a_k(t)$ sînt mărginite, deci

$$0 \leq a_k(t)<a_k \tag{5}$$

în orice interval $(t_0,\ t)\quad (t>t_0)$.

Cu aceste condiţii, relaţia fundamentală care corespunde lui (1):

$$p_m(t_0,\ t+\Delta)=\sum_0^m{}_k p_k(t_0,\ t)\,p_{k,\,m-k}(t,\ t+\Delta) \tag{6}$$

devine

$$\begin{aligned} p_m(t_0,\ t+\Delta)&=p_m(t_0,\ t)\,[1-\Delta a_m(t,\ t+\Delta)]+\\ &+p_{m-1}(t_0,\ t)\,\Delta b_{m-1}(t,\ t+\Delta)+\Delta\cdot 0(\Delta). \end{aligned} \tag{7}$$

Trecînd $p_m(t_0,\ t)$ în membrul întîi, împărţind cu Δ şi făcînd $\Delta\to 0$, ceea ce rămîne în membrul al doilea are o limită determinată, deci $\frac{dp_m(t_0,\ t)}{dt}$ există şi obţinem astfel sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{aligned} \frac{dp_m(t_0,\ t)}{dt}&=-a_m(t)\,p_m(t_0,\ t)+a_{m-1}(t)\,p_{m-1}(t_0,\ t)\\ &(m=0,\ 1,\ 2,\ldots), \end{aligned} \tag{8}$$

avînd

$$a_1(t)\equiv 0. \tag{9}$$

Vom scrie acest sistem sub forma

$$\frac{dx_m}{dt}=-a_m(t)\,x_m+a_{m-1}(t)\,x_{m-1}\qquad (m=0,1,2,\ldots). \tag{10}$$

şi vom arăta că el are, în condiţiile pe care le vom indica, o soluţie determinată pentru orice t şi unică, $x_m(t)$ $(m=0,1,2,\ldots)$, care verifică următoarele condiţii iniţiale, singurele compatibile cu procesul elementar (2):

$$\left.\begin{aligned} x_m(t_0)&=0\quad m=1,\ 2,\ldots,\\ x_0(t_0)&=1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2. *Integrarea sistemului* (10). Facem schimbarea sistemului $x_m(t)$ într-un sistem $y_m(t)$, prin relațiile

$$x_m = e^{-\int_{t_0}^{t} a_m(s)\,ds}\, y_m. \tag{12}$$

Obținem sistemul diferențial

$$\frac{dy_m}{dt} = b_{m-1}(t)\, y_{m-1}, \tag{13}$$

unde

$$b_{m-1}(t) = a_{m-1}(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} [a_{m-1}(s) - a_m(s)]\,ds} \qquad (b_{-1}(t) \equiv 0). \tag{14}$$

O dată cu $a_m(t)$, funcțiile $b_m(t)$ sînt și ele integrabile pentru orice t finit. Vom presupune acum că funcțiile $b_m(t)$ sînt *uniform mărginite:*

$$b_m(t) \leqq b. \tag{15}$$

Este suficient, pentru aceasta, ca funcțiile $a_m(s)$ să fie necrescătoare cu m:

$$a_m(s) \leqq a_{m-1}(s). \tag{16}$$

In acest caz,

$$b_m(t) \leqq a_m(t) \leqq a(t) \leqq a.$$

Din (13) rezultă, ținînd seamă de (11);

$$y_m = \int_{t_0}^{t} b_{m-1}(s_1)\,ds_1 \int_{t_0}^{s_1} b_{m-2}(s_2)\,ds_2 \ldots \int_{t_0}^{s_{m-1}} b_0(s_m)\,ds_m. \tag{17}$$

Deci folosind (15), obținem:

$$0 \leqq x_m(t) \leqq y_m(t) \leqq \frac{b^m (t-t_0)^m}{m!}. \tag{18}$$

Suma $S(t) = \sum_0^\infty {}_m\, x_m(t)$ este deci absolut și uniform convergentă. Din (10) rezultă că $S'(t) = 0$. Cum, pe de altă parte, $S(0) = 1$, vom avea $S(t) = 1$.

Putem deci pune

$$p_m(t_0, t) = p_m(t) = x_m(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_m(s)\,ds} \int_{t_0}^{t} b_{m-1}(s_1)\,ds_1 \int_{t_0}^{s_1} b_{m-2}(s_2)\,ds_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_0}^{s_{m-1}} b_0(s_m)\,ds_m \tag{19}$$

și cu aceasta problema este în întregime rezolvată.

3. *Funcția caracteristică a repartiției precedente* este reprezentată de seria absolut și uniform convergentă

$$\varphi(u,t)=\sum_0^\infty {}_m p_m(t)\, e^{imu}, \tag{20}$$

care este o funcție periodică cu perioada 2π.

Observăm că

$$p_0(t)=e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Această funcție descrește necontenit, începînd de la valoarea 1 (pentru $t=t_0$), deoarece $a(s)\geq 0$. Deci $\int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds$ crește indefinit. Dacă $\int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds=\alpha$, dar $e^{-\alpha}\leq\frac{1}{2}$, există un $t=t_{\frac{1}{2}}$ astfel că $p(t_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$. Dacă $e^{-\alpha}>\frac{1}{2}$, atunci $p(t)>\frac{1}{2}$ pentru orice t.

Cu aceste notații, putem enunța imediat teorema care urmează.

Teoremă.

$$\varphi(u,t)\neq 0 \tag{21}$$

pentru $t_0\leq t\leq t_{\frac{1}{2}}$, *oricare ar fi* u.

Pentru demonstrație vom scrie

$$\varphi(u,t)=p_0(t)\left[1+\frac{1}{p_0(t)}\sum_1^\infty {}_m p_m(t)\, e^{imu}\right]. \tag{22}$$

Observăm imediat că

$$\left|\frac{1}{p_0(t)}\sum_1^\infty {}_m p_m(t)\, e^{im\xi}\right|\leq\frac{1-p_0(t)}{p_0(t)}<1, \tag{23}$$

dacă

$$p_0(t)>\frac{1}{2},$$

deci $t<t_{\frac{1}{2}}$. Combinînd (23) cu (21) rezultă că

$$\varphi(u,t)\neq 0,$$

dacă $t<t_{\frac{1}{2}}$.

3. *Funcția caracteristică a repartiției precedente* este reprezentată de seria absolut și uniform convergentă

$$\varphi(u,t)=\sum_0^\infty {}_m p_m(t)\, e^{imu}, \tag{20}$$

care este o funcție periodică cu perioada 2π.

Observăm că

$$p_0(t)=e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Această funcție descrește necontenit, începînd de la valoarea 1 (pentru $t=t_0$), deoarece $a(s)\geqq 0$. Deci $\int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds$ crește indefinit. Dacă $\int_{t_0}^{\infty} a(s)\,ds=\alpha$, dar $e^{-\alpha}\leqq\frac{1}{2}$, există un $t=t_{\frac{1}{2}}$ astfel că $p(t_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$. Dacă $e^{-\alpha}>\frac{1}{2}$, atunci $p(t)>\frac{1}{2}$ pentru orice t.

Cu aceste notații, putem enunța imediat teorema care urmează.

Teoremă.

$$\varphi(u,t)\neq 0 \tag{21}$$

pentru $t_0\leqq t\leqq t_{\frac{1}{2}}$, *oricare ar fi* u.

Pentru demonstrație vom scrie

$$\varphi(u,t)=p_0(t)\left[1+\frac{1}{p_0(t)}\sum_1^\infty {}_m p_m(t)\, e^{imu}\right]. \tag{22}$$

Observăm imediat că

$$\left|\frac{1}{p_0(t)}\sum_1^\infty {}_m p_m(t)\, e^{im\xi}\right|\leqq\frac{1-p_0(t)}{p_0(t)}<1, \tag{23}$$

dacă

$$p_0(t)>\frac{1}{2},$$

deci $t<t_{\frac{1}{2}}$. Combinînd (23) cu (21) rezultă că

$$\varphi(u,t)\neq 0,$$

dacă $t<t_{\frac{1}{2}}$.

Pentru a arăta că (21) este valabilă și pentru $t=t_{\frac{1}{2}}$ cînd avem $p_0(t_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$, observăm că $p_1(t_{\frac{1}{2}})<\frac{1}{2}$, deoarece nu putem avea în nici un caz $p_1(t_{\frac{1}{2}})>\frac{1}{2}$, iar presupunerea $p_1(t_{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$ ar atrage $p_2(t_{\frac{1}{2}})\ldots p_m(t_{\frac{1}{2}})=\ldots=0$, ceea ce este exclus, dată fiind forma (19) a funcțiilor $p_m(t)$, în afară de cazul în care

$$a_1(t)=0$$

cînd, potrivit cu (19),

$$0\equiv p_2(t)=p_3(t)=\ldots$$

Acest caz și altele similare vor fi studiate separat.

Prin urmare, $p_0(t)=\frac{1}{2}>p_1(t_{\frac{1}{2}})$. Observăm atunci că

$$p_0(t_{\frac{1}{2}})+p_1(t_{\frac{1}{2}})\,e^{iu}\neq 0,$$

deoarece

$$|p_0(t_{\frac{1}{2}})+p_1(t_{\frac{1}{2}})\,e^{iu}|\geq p_0(t_{\frac{1}{2}})-p_1(t_{\frac{1}{2}})>0. \tag{24}$$

In expresia

$$\varphi(u,t_{\frac{1}{2}})=[p_0(t_{\frac{1}{2}})+p_1(t_{\frac{1}{2}})\,e^{iu}]\left[1+\frac{1}{p_0(t_{\frac{1}{2}})+e^{iu}\,p_1(t_{\frac{1}{2}})}\sum_{\frac{2}{m}}^{\infty}p_m e^{imu}\right]$$

avem

$$\left|\frac{\sum_{\frac{2}{m}}^{\infty}p_m e^{imu}}{p_0(t_{\frac{1}{2}})+p_1(t_{\frac{1}{2}})\,e^{iu}}\right|<\frac{1-p_0(t_{\frac{1}{2}})-p_1(t_{\frac{1}{2}})}{p_0(t_{\frac{1}{2}})-p_1(t_{\frac{1}{2}})}=1.$$

Inegalitatea fiind strictă, rezultă că

$$\varphi(u,t_{\frac{1}{2}})\neq 0.$$

Din această proprietate rezultă următoarea:

Teoremă. Pentru $t\leq t_{\frac{1}{2}}$ *avem:*

$$\varphi(u,t)=\frac{\varphi_1(u_1,t)}{\varphi_2(u_2,t)},$$

unde φ_1 *și* φ_2 *sînt două funcții pozitive definite pentru* $t\leq t_{\frac{1}{2}}$.

4. *Cazuri particulare.*

1°. $a_1(t)=0$.

Ecuațiile (8) devin

$$\frac{dp_0}{dt}=-a_0(t)\,p_0(t);\quad \frac{dp_1}{dt}=a_0(t)\,p_0(t);\quad \frac{dp_m}{dt}=0.\qquad (m=2,3,\ldots).$$

Deci,

$$p_m(t)=p_m(0)=0\qquad (m=2,3,\ldots).$$

Va trebui să avem

$$e^{-\int_{t_0}^{t} a_0(s)\,ds}+\int_{t_0}^{t} a_0(s)\,e^{-\int_{t_0}^{s} a_0(u)\,du}\,ds=1,$$

ceea ce se verifică ușor.

In acest caz,

$$\varphi(u,t)=p_0(t)+p_1(t)\,e^{iu},$$

unde $\varphi(u,t)=0$ numai pentru $t=t_{\frac{1}{2}}$ și $u=0$ sau π.

2°. $a_0(t)\geqq 0,\quad a_1(t)\geqq 0,\quad a_2(t)\equiv 0$.

Ecuațiile (8) devin

$$\frac{dp_0}{dt}=-a_0p_0;\quad \frac{dp_1}{dt}=-a_1p_1+a_0p_0;\quad \frac{dp_2}{dt}=a_1p_1 \qquad (25)$$

$$p_3=p_4=\ldots\equiv 0,$$

$$p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)=1.$$

Funcția caracteristică devine

$$\varphi(u,t)=p_0(t)+e^{iu}\,p_1(t)+e^{2iu}\,p_2(t).$$

Știm că, pentru $t\leqq t_{\frac{1}{2}}$, avem $f(u,t)\neq 0$.

Se verifică imediat că, pentru $t\geqq t_{\frac{1}{2}}$, există cazuri în care $\varphi(u,t)=0$.

Avem pentru aceasta ecuațiile

$$p_0+p_1\cos u+p_2\cos 2u=0;\quad p_1\sin u+p_2\sin 2u=0,$$

care dau pentru $u=\pi$ condiția

$$p_1=p_0+p_2=1-p_1,$$

deci $p_1=\frac{1}{2}$, a cărei realizare depinde de funcțiile $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$.

Pentru $\sin u\neq 0$, cele două ecuații se înlocuiesc cu

$$p_1+2p_2\cos u=0,\quad p_0=p_2,$$

a cărei realizare depinde de asemenea de funcțiile $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$.

3°. Dacă, în cazul de mai sus, a_0, a_1, a_2 sînt constante, soluțiile sistemului (25) sînt

$$p_0(t)=e^{-a_0(t-t_0)},$$

$$p_1(t)=\frac{a_0}{a_1-a_0}\left[e^{-a_0(t-t_0)}-e^{-a_1(t-t_0)}\right],$$

$$p_2(t)=\frac{a_0 a_1}{a_1-a_0}\left[\frac{1}{a_0}\left[e^{-a_0(t-t_0)}-1\right]-\frac{1}{a_1}\left(e^{-a_1(t-t_0)}-1\right)\right].$$

Aceste expresii simple permit examinarea efectivă a realizării cazurilor găsite mai sus.

5. In general, dacă avem $a_k(t)\equiv 0$, va rezulta din condițiile inițiale că $p_{k+1}(t)\equiv 0$, $p_{k+2}(t)\equiv 0,\ldots$, prin urmare funcția caracteristică se reduce la un polinom:

$$\varphi(\xi,t)=p_0(t)+e^{i\alpha\xi}p_1(t)+\ldots+e^{ik\alpha\xi}p_k(t)$$

$$(p_0+p_1+\ldots+p_k)=0.$$

Putem da astfel o interpretare simplă și aplicații schemelor care conduc la astfel de polinoame.

§ 5. Cazul mai multor frecvențe

Schema procesului și ecuațiile diferențiale pentru două evenimente elementare. Se concepe ușor un proces de emisiune de mai multe tipuri de particule. Dacă între ele nu există nici o corelație, procesele se examinează pentru fiecare tip de particulă, independent de celelalte. Vom presupune, că există o corelație și că avem de-a face numai cudouă tipuri de particule.

Vom avea astfel

$$E_{m,n}^{t_0,t+\Delta}=\bigcup_{\substack{h=0,1,\ldots,m\\k=0,1,\ldots,n}}\left|E_{h,k}^{t_0,t}\cap E_{m-h,n-k}^{t,t+\Delta}\right|. \tag{1}$$

Deci, punînd

$$p_{m,n}(t_0,t)=P\left|E_{m,n}^{t_0,t}\right|,$$

relația (1) dă

$$p_{m,n}(t_0,t+\Delta)=\sum_{\substack{h=0,1,\ldots,m\\k=0,1,\ldots,n}}p_{hk}(t_0,t)\,P\left|E_{m-h,n-k}^{t,t+\Delta}/E_{h,k}^{t_0,t}\right|. \tag{2}$$

Vom da, ca și în paragrafele precedente, regulile procesului elementar:

$$\left.\begin{aligned}
&P\left[E_{0,0}^{t,t+\Delta}/E_{h,k}^{t_0,t}\right]=1-a_{hk}(t,t+\Delta)\,\Delta,\\
&P\left[E_{1,0}^{t,t+\Delta}/E_{h,k}^{t_0,t}\right]=b_{hk}(t,t+\Delta)\,\Delta,\\
&P\left[E_{0,1}^{t,t+\Delta}/E_{h,k}^{t_0,t}\right]=c_{hk}(t,t+\Delta)\,\Delta,\\
&P\left[E_{1,1}^{t,t+\Delta}/E_{h,k}^{t_0,t}\right]=d_{hk}(t,t+\Delta)\,\Delta,\\
&P\left[E_{r,s}^{t,t+\Delta}/E_{h,k}^{t_0,t}\right]=\Delta\,0(\Delta)\quad\text{pentru}\quad r\geq 1,\ s>1;\quad r>1,\ s\geq 1.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Se verifică și aici imediat că

$$a_{hk}(t,t+\Delta)=b_{hk}(t,t+\Delta)+c_{hk}(t,t+\Delta)+d_{hk}(t,t+\Delta)+0(\Delta).$$

Presupunem toate aceste funcții continue de argumentul al doilea, oricare ar fi t, și punem $a_{hk}(t,t)=a_{hk}(t)$ etc., ceea ce ne dă

$$a_{hk}(t)=b_{hk}(t)+c_{hk}(t)+d_{hk}(t).\qquad(4)$$

Folosind condițiile (3) în relația (2), divizînd cu Δ și trecînd la limită, obținem sistemul

$$\frac{dp_{m,n}(t)}{dt}=-a_{m,n}(t)\,p_{m,n}(t)+b_{m-1,n}(t)\,p_{m-1,n}(t)+$$
$$+c_{m,n-1}(t)\,p_{m,n-1}(t)+d_{m-1,n-1}(t)\,p_{m-1,n-1}(t).\qquad(5)$$

Se demonstrează, ca mai sus, că acest sistem admite, în condiții care se pot caracteriza ușor urmînd procedeele de mai sus, o soluție unică și determinată $p_{m,n}(t_0,t)=p_{m,n}(t)$ $(t>t_0)$, (acesta din urmă fixat o dată pentru totdeauna), cu condițiile inițiale $p_{0,0}(t_0,t_0)=1$, $p_{m,n}(t_0,t_0)=0$ pentru $m\geq 0$, $n>0$ sau $m>0$, $n\geq 0$.

Funcțiile $p_{m,n}(t)$ corespund corelației și au în aplicații un rol deosebit de important. Dacă toate aceste funcții sînt nule, evenimentele elementare sînt independente între ele în sensul procesului de mai sus.

Dacă presupunem existența unei corelații între evenimentele elementare, va fi în general suficient să presupunem numai că $d_{0,0}(t)\neq 0$.

§ 6. Probabilităţile limită ale unui proces Markov cu evenimente rare. Funcţiile caracteristice ale lui Mihoc

1. *Definirea unui lanţ Markov cu evenimente rare.* Fie $E_1, E_2, \ldots, E_m$ o desfacere a mulţimii E din cîmpul de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$ şi un proces în lanţ Markov simplu definit prin probabilităţile de trecere $p_{jh}(\tau)$, funcţii continue de intervalul de timp τ, propriu lanţului.

In afară de condiţiile generale

$$p_{jh}(\tau) \geq 0, \quad \sum_h p_{jh}(\tau) = 1, \tag{i}$$

mai presupunem că

$$p_{j1}(\tau) = \omega_j \tau + 0(\tau); \quad 0 \leq \omega_j < 1 \qquad j = 2, 3, \ldots, m \tag{ii}$$

fără ca toate valorile ω_j să fie nule.

Intrucît ne interesează frecvenţa evenimentului E_1, considerăm variabila aleatorie care pentru E_1 ia valoarea 1 şi pentru celelalte evenimente ia valoarea zero. Această variabilă va putea lua, într-o succesiune de n operaţii, valorile $0, 1, \ldots, n$.

Funcţia caracteristică respectivă $F_k(n, \tau)$ verifică relaţia funcţională

$$\varphi_k(n, u) = p_{k1} e^{iu} \varphi_1(n-1, u) + \sum_{h=2,3,\ldots,m} p_{kh} \varphi_n(n-1, u). \tag{1}$$

Presupunem că ecuaţia $D(\lambda, 0) = 0$ are, ca unică rădăcină de modul unu, rădăcina $\lambda = 1$. In acest caz,

$$\varphi_k(n, u) = A_k(u) \lambda_1^n(u) + B_k(n, u), \tag{2}$$

unde $\lambda_1(u)$ este rădăcina ecuaţiei $D(\lambda, u) = 0$, care tinde către unu cînd u tinde către zero, iar $B_k(n, u)$ tinde către zero cînd n tinde către infinit, oricare ar fi n.

Ţinînd seamă de faptul că $p_{jh} = p_{jh}(\tau)$, $A_k(u)$, $B_k(n, u)$ cît şi $\lambda_1(u)$ sînt funcţii de τ. Vom face $\tau = \frac{t}{n}$. Cînd $n \to \infty$ găsim, cu Gh. Mihoc

$$\lim_{n\to\infty} A_1(u) = \frac{1 - p_{11}(0)}{1 - e^{iu} p_{11}(0)}, \quad \lim_{k \neq 1} A_k(u) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^n(u) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^1\left(u, \frac{t}{n}\right) = e^{-kt \frac{1 - e^{iu}}{1 - p_{11}(0) e^{iu}}}.$$

Obținem astfel funcțiile caracteristice obținute de *Koopman* pentru cazul unui lanț cu două evenimente:

$$\varphi_1(u)=\frac{1-l}{1-le^{iu}}\,e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-le^{iu}}}, \tag{3}$$

$$\varphi_j(u)=e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-le^{iu}}} \qquad j=2,3,\ldots,m, \tag{4}$$

cu $l=p_{11}(0)<1$ și $k=\dfrac{\sum\omega_j c_j}{\sum c_j}$.

Dacă presupunem că, o dată cu E_1, *sînt rare și evenimentele* $E_2, E_3, \ldots, E_h$, ceea ce se exprimă prin condițiile

$$p_{jl}(\tau)=\omega_{jl}\tau+0(\tau), \quad l=1,2,\ldots,h; \quad j=h+1,\ h+2,\ldots,m,$$

$$h<m, \tag{iii}$$

același procedeu ne conduce [1]) la distribuții limită ale căror funcții caracteristice sînt

$$\varphi_1(u)=\frac{1}{1-le^{iu}}\,e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-le^{iu}}},$$

$$k=2,3,\ldots,h$$

$$\varphi_r(u)=e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-le^{iu}}},$$

$$r=h+1,\ h+2,\ldots,m,$$

unde a, b, c, d, A, B, C, D sînt constante depinzînd de p_{jk} sau derivatele lor cînd $\tau\to 0$.

Pentru distribuțiile limită obținute în cazul lanțurilor multiple trimitem la lucrările lui Gh. Mihoc citate la sfîrșitul acestui capitol.

2. *Asupra naturii distribuțiilor limită.* Distribuțiile precedente sînt rezultatele compunerii distribuțiilor discontinue

$$\psi_1(u)=e^{-kt\frac{1-e^{iu}}{1-le^{iu}}}, \quad \psi_2(u)=\frac{1-l}{1-le^{iu}}$$

[1]) A se vedea: *Gh. Mihoç*, Legea evenimentelor rare pentru lanțurile Markov, Bul. Științific, Acad. R. P. R., T. 4, 1952.

și

$$\psi_3(u) = 1 - l + le^{iu}$$

prin urmare, sînt ele însele discontinue și ca atare, eventual, de natură cuantică.

Pentru $t \to \infty$, aceste distribuții *degenerează*. Pentru intervalul $t=0$, în cazul (3), de exemplu, $\varphi_1(u)$ este o distribuție semnificativă

$$\psi_1(u) = (1-l)(1 + l e^{iu} + l^2 e^{2iu} + \ldots),$$

iar $\varphi_k(u) = 1$ pentru $k = 2, 3, \ldots$

Această din urmă valoare corespunde faptului că, dacă la momentul inițial avem unul dintre evenimentele curente, nu putem trece într-un interval foarte mic în evenimentul rar. Frecvența lui își păstrează valoarea zero.

Dacă însă sîntem în evenimentul rar, într-un cît de mic interval de timp el poate avea, cu probabilități egale, respectiv frecvențele

$$1-l, \quad (1-l)l, \quad (1-l)l^2, \ldots$$

$0, 1, 2, \ldots$

In cazul mai multor evenimente rare, frecvența evenimentului E_1 depinde de evenimentul inițial și pentru $t=0$ se comportă așa cum arată (4).

BIBLIOGRAFIE

R. de Mises: Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse, Zeitschrift für angewandte Math. Bd. 1, 1921.

B. de Finetti: Sulla possibilità di valori eccezional per una legge a incrementi aleatori, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, Bd. 10, 1929.

A. Hincin: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1933.

B. D. Koopman: A Law of small Numbers in Markov Chains, Trans. Ann. Mat. Soc., t. 70, 1951.

Gh. Mihoc: Legea evenimentelor rare pentru lanțurile Markov, Bul. științific Ac. R. P. R., t. 4, 1952.

Gh. Mihoc: Extinderea legii lui Poisson pentru lanțurile Markov, multiple și omogene, Bul. științific Ac. R. P. R., t. V, 1954.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc:* Les chaînes de variabiles aleatoires. Problèmes asymptotiques, Ac. Romînă, București, 1934.

A. Rényi: On some Problems Concerning Poisson Processes, Publ. mat. Budapest, t. 2, nr. 1, 1591.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

PROCESE STOCHASTICE DE PROPAGARE IN TIMP CONTINUU. TEORIA ANALITICĂ

§ 1. Procese cu un număr finit sau numărabil de stări

1. *Ecuația funcțională fundamentală.* Un lanț Markov este un proces discontinuu, determinat de probabilitățile elementare $p_{jk}(n, n+1)$ pentru $n=1, 2, \ldots, \infty$. Probabilitățile de trecere $p_{jk}(l, n)$ $(n \geq l)$ verifică relațiile

$$p_{jk}(l, n)=\sum_h p_{jh}(l, u)\, p_{hk}(u, n) \tag{1}$$

pentru orice u întreg verificînd relațiile

$$l \leq u \leq n.$$

Cu ajutorul probabilităților elementare și al relațiilor (1) se construiesc oricare dintre probabilitățile $p_{jk}(m, n)$.

Procesul continuu, cu probabilitatea $p_{jk}(s, t)$ $(s \leq t,\ j, k=1, 2, \ldots, m)$, reprezentînd probabilitatea de trecere de la evenimentul E_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ în momentul s la evenimentul E_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ în momentul ulterior t, este caracterizat, principial, prin relația funcțională:

$$p_{jk}(s, t)=\sum_h p_{jh}(s, u)\, p_{hk}(u, t), \tag{2}$$

unde $j, h, k=1, 2, \ldots, m$; $s \leq u \leq t$, și prin probabilitățile elementare

$$p_{jk}(s, s+\Delta)=\delta_{jk}+\Delta a_{jk}(s, \Delta). \tag{3}$$

In această din urmă relație,

$$\delta_{jk}=\begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k=j. \end{cases} \tag{4}$$

Funcțiile $a_{jk}(s, \Delta)$ sînt continue în s și Δ pentru $s \leq u \leq T$, iar pentru Δ în vecinătatea pozitivă a lui $\Delta=0$, și satisfac în plus inegalitățile

$$a_{jk} \begin{cases} \geq 0 & k \neq j \\ \leq 0 & k=j \end{cases}; \qquad \sum_k a_{jk}(s, \Delta)=0 \qquad (j, k=1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Aceste inegalităţi corespund faptului că $p_{jk}(s,t)$ constituie un sistem de probabilităţi complet

$$0 \leq p_{jk}(s,t) \leq 1; \quad \sum_k p_{jk}(s,t) = 1. \tag{6}$$

Reamintim, în sfirşit, că evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_m$ constituie o desfacere a evenimentului total E.

2. *Ecuaţiile diferenţiale ale lui Kolmogorov.* Din relaţia (3) rezultă, în particular,

$$p_{jk}(s,s) = \delta_{jk}.$$

Relaţia (2) se poate scrie

$$p_{jk}(s, t+\Delta) = \sum_h p_{jh}(s,t)\, p_{hk}(t, t+\Delta).$$

Avem, în acelaşi timp,

$$p_{jk}(s,t) = \sum_h p_{jh}(s,t)\, p_{hk}(t,t).$$

Din aceste două egalităţi, folosind relaţia (3), obţinem:

$$p_{jk}(s, t+\Delta) - p_{jk}(s,t) = \Delta \sum_h p_{jh}(s,t)\, a_{hk}(t, \Delta).$$

Deoarece $a_{hk}(t, \Delta)$ este continuă faţă cu Δ, dacă punem

$$a_{hk}(t,0) = a_{hk}(t),$$

putem divide cu Δ şi trece la limită cu $\Delta \to 0$, ceea ce ne conduce la ecuaţiile

$$\frac{\partial p_{jk}(s,t)}{\partial t} = \sum_h p_{jh}(s,t)\, a_{hk}(t), \qquad s<t. \tag{7}$$

Funcţiile $p_{jk}(s,t)$ sînt deci soluţiile sistemului diferenţial al lui Kolmogorov

$$\frac{d\Pi_k(t)}{dt} = \sum_h \Pi_h(t)\, a_{hk}(t) \qquad (t>s), \tag{8}$$

cu condiţiile limită

$$\Pi_k(s) = \delta_{jk} \qquad (j,h,k = 1,2,\ldots,m). \tag{8'}$$

De asemenea, din (2) și (3) obținem:

$$p_{jk}(s+\Delta,\ t)-p_{jk}(s,\ t)=-\Delta\sum_h a_{jh}(s,\ \Delta)\,p_{hk}(s+\Delta,\ t).$$

De unde, dacă presupunem continuitatea funcțiilor $p_{hk}(s,\ t)$ față de variabila s, rezultă derivabilitatea acestor funcții față cu s și anume sistemul diferențial

$$\frac{\partial p_{jk}(s,\ t)}{\partial s}=-\sum_h a_{jh}(s)\,p_{hk}(s,\ t).$$

Funcțiile $p_{jk}(s,\ t)$ sînt, prin urmare, și soluțiile sistemului al doilea diferențial al lui Kolmogorov:

$$\frac{d\theta_j(s)}{ds}=-\sum_h a_{jh}(s)\,\theta_h(s)\quad s<t \tag{9}$$

cu condițiile limită

$$\theta_j(t)=\delta_{jk}. \tag{9'}$$

Putem deci enunța următoarea

Teoremă. Un proces stochastic continuu $p_{jk}(s,\ t)$, *care verifică relațiile* (2) *și* (3) *într-un interval* $T_0\leq s\leq t\leq T$, *satisface, în același interval, ca funcție de* t, *sistemul* (8), (8'), *iar ca funcție de* s, *sistemul* (9), (9').

3. *Integrarea sistemelor* (8) *și* (9). In ipoteza continuității funcțiilor $a_{hk}(t)$, din relațiile (8) și (8') rezultă prin integrare

$$\Pi_k(t)=\Pi_k(s)+\int_s^t\sum_h \Pi_h(u_1)\,a_{hk}(u_1)\,du_1.$$

Inlocuind sub integrala din membrul al doilea funcțiile $\Pi_h(u_1)$ date de aceeași relație, trecem la

$$\Pi_k(t)=\Pi_k(s)+\sum_{h_1}\Pi_{h_1}(s)\int_s^t a_{h_1k}(u_1)\,du_1+$$

$$+\sum_{h_1h_2}'\int_s^t du_1\int_s^{u_1}\Pi_{h_2}(u_2)\,a_{h_2h_1}(u_2)\,a_{h_1h}(u_1)\,du_2.$$

Continuînd în acest mod, găsim prin n iteraţii succesive

$$\Pi_k(t)=\Pi_k(s)+\sum_{h_1}\Pi_{h_1}(s)\int_s^t a_{h_1k}(u_1)\,du_1+$$

$$+\sum_{h_1h_2}\Pi_{h_2}(s)\int_s^t du_1\int_s^{u_1} a_{h_2h_1}(u_2)\,a_{h,k}(u_1)\,du_2+\ldots+\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_n}\Pi_{h_n}(s)\int_s^t du_1\int_s^{u_2} du_2\ldots$$

$$\ldots\int_s^{u_{n-1}} a_{h_nh_{n-1}}(u_n)\,a_{h_{n-1}h_{n-2}}(u_{n-1})\ldots a_{h_1k}(u_1)\,du_n+R_n. \qquad (10)$$

Ţinînd seamă de (8′), dezvoltarea (10) devine

$$\Pi_k(t)=\delta_{jk}+\int_s^t a_{jk}(u_1)\,du_1+\sum_{h_1}\int_s^t du_1\int_s^{u_1} a_{jh_1}(u_2)\,a_{h_1k}(u_1)\,du_2+\ldots$$

$$+\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{n-1}}\int_s^t du_1\ldots\int_s^{u_{n-1}} a_{jh_{n-1}}(u_n)\,a_{h_{n-1}h_{n-2}}(u_{n-1})\ldots$$

$$\ldots a_{h_1k}(u_1)\,du_n+R_{nk}. \qquad (11)$$

Pentru a putea discuta complet soluţiile sistemelor (8) şi (9) vom presupune

$$|a_{jj}(t)|\leq A \quad T_0\leq s\leq t\leq T. \qquad (12)$$

$$(j=1,\ 2,\ldots,m).$$

Rezultă, din (4):

$$\sum_{h\neq j}a_{jk}(t)=-a_{jj}(t)\leq A,$$

deci

$$\sum_k|a_{jk}(t)|<2A.$$

Prin urmare,

$$\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{n-1}}|a_{jh_{n-1}}(u_n)||a_{h_{n-1}h_{n-2}}(a_{n-1})|\ldots|a_{h_1k}(u_1)|\leq 2^nA^n. \qquad (13)$$

Deci termenul de rangul n din dezvoltarea (11) este majorat de

$$\frac{2^nA^n(t-s)^n}{n!}.$$

Seria care se obţine în (11), continuînd dezvoltarea, este deci absolut şi — cum se vede lesne — uniform convergentă pentru t, verificînd condiţia dată de relaţia (12).

Se constată imediat, direct, că soluţia dată de această serie verifică sistemul (8), (8′).

Continuitatea funcţiilor $a_{jk}(t)$ *într-un interval* (s, T) *este pentru aceasta suficientă.*

Procedînd în acelaşi mod pentru sistemul diferenţial (9), (9′), obţinem seria absolut şi uniform convergentă în intervalul (s, T):

$$\theta_j(s)=\delta_{jk}+\int_s^t a_{jk}(u_1)\,du_1+\sum_{h_1}\int_s^t a_{jh_1}(u_1)\,a_{h_1k}(u_2)\,du_2+\ldots \qquad (14)$$

Se verifică imediat că $\theta_j(s)$ satisfac sistemul (9), (9′).

Se observă, în acelaşi timp, că în dezvoltările (11) şi (12) termenii respectivi sînt egali. Prin urmare,

$$\theta_j(s)\equiv\Pi_k(t)=p_{jk}(s, t).$$

Se mai poate observa pe dezvoltările (11) şi (14), cel puţin în condiţiile (12) considerate aici şi de altfel ori de cîte ori aceste dezvoltări sînt absolut şi uniform convergente, că $\Pi_k(t)$, considerată ca funcţie de s, verifică sistemul (9), (9′), este deci identică cu $\theta_j(s)$ şi reciproc. Cele două funcţii sînt deci identice.

4. *Determinarea procesului prin sistemul diferenţial* (8), (8′) *sau* (9), (9′). Sîntem acum în măsură să demonstrăm următoarea:

Teoremă. Fiind dat sistemul de funcţii $a_{jk}(u)$ $(j, k=1, 2,\ldots m)$ *continue într-un interval* (T_0, T) *şi verificînd condiţiile* (5), *sistemul* (8), (8′) *sau* (9), (9′) *determină un proces continuu* $p_{kj}(s, t)(j, k=1, 2,\ldots, m)$ *pentru* $T_0\leq s\leq t\leq T$.

Pentru demonstrare trebuie să arătăm că soluţia $p_{jk}(s, t)=\Pi_k(t)$ dată de (11) pentru sistemul (8), (8′) verifică relaţiile (6) şi în acelaşi timp relaţiile Chapman (1).

Incepem cu acestea din urmă.

Am arătat că, punînd $p_{jk}(s, t)=\Pi_k(t)$, aceste mărimi considerate ca funcţii de s verifică sistemul (9), (9′).

Fie atunci funcţia

$$P_{jk}(s, u, t)=\sum_h p_{jh}(s, u)\,p_{hk}(u, t). \qquad (15)$$

$$s\leq u\leq t$$

Derivînd în ambii membri în raport cu u, obţinem:

$$\frac{\partial P_{jk}(s, u, t)}{\partial u}=\sum_h \frac{\partial p_{jh}(s, u)}{\partial u}\,p_{hk}(u, t)+\sum_h p_{jh}(s, u)\,\frac{\partial p_{hk}(u, t)}{\partial u}.$$

Inlocuind cele două derivate din membrul al doilea prin expresiile lor date de (8) şi (9), obţinem zero, deci $P_{jk}(s, u, t)$ nu depinde de u; funcţia (15) devine

$$P_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, u)\, p_{hk}(u, t). \tag{16}$$

Făcînd aici $u = t$, rezultă:

$$P_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, t)\, p_{hk}(t, t) = p_{jk}(s, t).$$

Deci, înlocuind în (15), obţinem:

$$p_{jk}(s, t) = \sum_h p_{jh}(s, u)\, p_{hk}(u, t).$$

Relaţia caracteristică procesului este astfel verificată.

Din sistemul (8), însumînd faţă de k şi ţinînd seamă de (6), rezultă:

$$\frac{d \sum_k \Pi_k(t)}{dt} = 0,$$

deci, ţinînd seamă de (8′),

$$\sum_k \Pi_k(t) = \sum_k \Pi_k(s) = 1.$$

Rămîne să arătăm că $\Pi_k(t) \geq 0$.

Să dividem intervalul (s, t) în n părţi egale, prin punctele de diviziune $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Relaţia (16) ne va da

$$p_{jk}(s, t) = \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} p_{jh_1}(s, u_1)\, p_{h_1 h_2}(u_1, u_2) \ldots p_{h_{n-1} k}(u_{n-1}, t), \tag{17}$$

oricît de mare ar fi n.

Pe de altă parte, din (11) rezultă, prin aplicarea teoremei mediei, *dacă* $u_{j+1} - u_j$ *este suficient de mic:*

$$p_{h_j h_{j+1}}(u_j, u_{j+1}) = \delta_{h_j h_{j+1}} + (u_{j+1} - u_j)\, a_{jk}(u_j') \geq 0.$$

Rezultă că putem alege pe n suficient de mare pentru ca termenii sumei din membrul al doilea din (17) să fie pozitivi sau nuli; prin urmare,

$$p_{jk}(s, t) \geq 0.$$

Cu aceasta demonstraţia este terminată.

Scanned with OKEN Scanner

5. *Proces omogen.* Dacă procesul este omogen, deci $p_{jk}(s, t)$ depinde numai de intervalul $t-s$, adică

$$p_{jk}(s, t)=p_{jk}(t-s) \quad (j, k=1, 2, \ldots, m),$$

funcţiile $a_{jk}(u)$ sînt constante şi reciproc. Dacă aceste funcţii sînt constante, procesul este omogen. In acest caz, dezvoltarea (11) devine:

$$\Pi_k(t)=\delta_{jk}+A_{jk}^{(1)}\frac{t-s}{1}+A_{jk}^{(2)}\frac{(t-s)^2}{2!}+\ldots+A_{jk}^{(n)}\frac{(t-s)^n}{n!}+\ldots, \qquad (18)$$

unde

$$A_{jk}^{(n)}=\sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}} a_{jh_{n-1}}a_{h_{n-1}h_{n-2}}\ldots a_{h_1k},$$

cu mărginirea dată de (13) care învederează convergenţa absolută a seriei (18).

O serie identică se obţine din (14).

6. *Funcţiile $a_{jk}(u)$ şi procesele de tip Feller.* In general, nu putem atribui un sens fizic direct funcţiilor $a_{jk}(u)$. In cazul proceselor de tip Feller, care se mai numesc şi pur discontinue, putem preciza un astfel de sens, care rezultă din interpretarea unor fenomene de radiaţie cărora le corespund aceste procese.

Pentru procesele pur discontinue avem:

$$a_{jk}(u)=\rho_j(u)(\Pi_{jk}(u)-\delta_{jk}) \quad (j, k=1, 2, \ldots, m),$$

unde $\Pi_{jk}(j, k=1, 2, \ldots, m;\ \Pi_{jk}\geq 0,\ \sum_k \Pi_{jk}=1)$ este *probabilitatea de salt discontinuu la momentul u din starea j în starea k, iar $\rho_j(u)$ este intensitatea acestui fenomen.*

Funcţiile $\Pi_{jk}(u)$ şi $\rho_j(u)$ se presupun continue, iar $\rho_j(u)\geq 0$ prin însăşi semnificaţia ei. Este evident suficient ca în intervalul procesului să avem

$$\rho_j(u)\leq \rho \qquad (19)$$

pentru ca convergenţa să fie asigurată. Condiţia nu este evident necesară şi *există împrejurări fizice* în care procesul este determinat fără ca această condiţie să fie îndeplinită.

7. *Procesele cu o mulţime numărabilă de stări.* Pentru aceste procese, atît relaţiile (1) şi (3) cît şi sistemele (8) sau (9) îşi

păstrează valabilitatea făcînd $m=\infty$. De asemenea, își păstrează valabilitatea forma (11) sau (14) a soluțiilor respective, cu condiția ca seriile să fie convergente. Dacă condiția (12) este îndeplinită sau, pentru procesele de tip Feller, condiția (19) este îndeplinită, vom avea evident convergență. Seriile sînt suficient de repede convergente pentru a fi utilizabile în practică.

In lucrarea lui N. Arley se găsesc numeroase aplicații la teoria radiației cosmice a acestor procese, considerîndu-se și cazuri în care există convergență fără ca $\rho_j(u)$ să fie mărginite.

§ 2. Procese continue cu o dimensiune. Procesele lui W. Feller

1. *Ecuația funcțională și procesul elementar.* Dacă notăm cu $P(s, x; t, X)$ probabilitatea de trecere de la evenimentul elementar reprezentat de punctul de abscisă x la momentul s, la evenimentul reprezentat de mulțimea măsurabilă X la momentul ulterior t, această probabilitate corespunde unui proces de propagare (generalizarea procesului Markov) simplă dacă verifică ecuația Chapman-Kolmogorov:

$$P(s, x; t, X) = \int_R P(s, x; u, dy) P(u, y; t, X) \tag{1}$$

pentru orice u cuprins între s și t.

In această integrală, $P(s, x; u, dy)$ are sensul precis al variației unei funcții de repartiție $dF(s, x; u, y)$, unde am pus

$$F(s, x; t, y) = P(s, x; t, Y), \tag{2}$$

Y fiind intervalul $[0, y)$ deschis la dreapta. Integrala este deci de tipul Stieltjes.

Funcția $P(s, x; t, X)$ este continuă în raport cu x și este funcție total aditivă față de mulțimea X; ea este o probabilitate:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq P(s, x; t, X) = 1; \quad P(s, x; t, \Phi) = 0, \\ P(s, x; t, R) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Procesul elementar are, în acest caz, forma

$$P(s, x; s+\Delta, X) = \delta(x, X) + \Delta a(s, x, X; \Delta), \tag{4}$$

unde

$$\delta(x, X) = \begin{cases} 1 & x \in X, \\ 0 & x \in \complement X. \end{cases} \tag{i}$$

Funcţia

$$a(s, x; Y, \Delta)$$

este pentru orice Δ o funcţie continuă de s şi x, total aditivă de X şi, ţinînd seamă de (3),

$$a(s, x; X, \Delta) \begin{cases} \leq 0 & x \in X, \\ \geq 0 & x \in \mathbb{C}X, \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$a(s, x; R, \Delta) = 0.$$

2. *Procesele pentru care funcţia* $a(s, x; X, \Delta)$ *este continuă în* Δ. In acest caz, vom pune

$$a(s, x; X, 0) = a(s, x; X).$$

Această funcţie este, ca oricare $a(s, x; X, \Delta)$, continuă în s şi x, total aditivă în X şi verifică inegalităţile (ii).

Din (1) şi (2) rezultă

$$P(s, x; t+\Delta, X) - P(s, x; t, X) = \Delta \int_R P(s, x; u, dy)\, a(t, y; X, \Delta).$$

De unde, divizînd cu Δ şi făcînd $\Delta \to 0$, găsim ecuaţia integrodiferenţială

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial t} = \int_R P(s, x; t, dy)\, a(t, y, X). \qquad (5)$$

Prin urmare, *probabilitatea* $P(s, x; t, X)$ *este soluţia sistemului*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(t, X)}{\partial t} &= \int_R \Pi(t, dy)\, a(t, y, X) \qquad t > s \\ \Pi(s, X) &= \delta(x, X). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

De asemenea, din (1) şi (2) rezultă:

$$P(s+\Delta, x; t, X) - P(s, x; t, X) =$$

$$= -\Delta \int_R a(s, x; dy, \Delta) P(s+\Delta, y; t, X), \qquad (7)$$

ceea ce dă

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial s} = -\int_R a(s, x; dy) P(s, y; t, X).$$

Deci, $P(s, x; t, X)$ este soluţia sistemului

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta(s, x)}{\partial s} &= -\int_R a(s, x, dy)\, \theta(s, y) \qquad s < t \\ \theta(t, x) &= \delta(x, X). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Soluția sistemului (6) este dată de seria

$$\Pi(t,\ X)=\delta(x,\ X)+\int_s^t a(u_1,\ x,\ X)\,du_1+$$

$$+\int_s^t du_1\int_s^{u_1} du_2\int_R a(u_2,\ x,\ dy_1)\,a(u_1,\ y_1,\ X)+\ldots, \qquad (9)$$

dacă aceasta este absolut convergentă.

In ipoteza

$$|a(u,\ x,\ X)|<A, \qquad (10)$$

seria (9) ca și seria corespunzătoare sistemului (8)

$$\theta(s,\ x)=\delta(x,\ X)+\int_s^t a(u_1,\ x,\ X)\,du_1+$$

$$+\int_s^t du_1\int_{u_1}^t du_2\int_R a(u_1,\ x,\ dy_1)\,a(u_2,\ y_1,\ X)+\ldots \qquad (11)$$

sînt absolut convergente.

In aceste cazuri, cele două serii reprezintă aceeași funcție

$$\Pi(t,\ X)=\theta\ (s,\ x)=P(s,\ x;\ t,\ X).$$

Putem acum demonstra următoarea

Teoremă. O funcție $a(u,\ x,\ X)$ *verificînd condițiile* (i), (ii) *și* (10) sau altă condiție mai largă pentru care cele două serii sînt absolut convergente) *determină un proces* $P(s,\ x;\ t,\ X)$.

Demonstrația urmează exact același drum ca în cazul finit.

Proces omogen. In acest caz,

$$P(s,\ x;\ t,\ X)=P(t-s;\ x,\ X).$$

Rezultă că funcția a nu depinde de timp

$$a\equiv a(x,\ X).$$

Seria (9) devine

$$P(t-s,\ x,\ X)=\delta(x,\ X)+A^{(1)}(x,\ X)\frac{t-s}{1}+$$

$$+A^{(2)}(x,\ X)\frac{(t-s)^2}{2!}+\ldots, \qquad (12)$$

unde

$$A^{(1)}(x,\ X)=a(x,\ X);\quad A^{(2)}(x,\ X)=\int_R a(x,\ dy_1)\,a(y_1,\ X),$$

$$A^{(n)}(x,\ X)=\int_{R^{(n-1)}} a(x,\ dy_1)\,a(y_1,\ dy_2)\ldots a(y_{n-1},\ X). \qquad (13)$$

Ținînd seamă că

$$\int_R a(x,\ dy) = a(x,\ R) = 0,$$

dacă numim cu R_1 mulțimea pe care $a(x,\ dy)$ este pozitivă și cu R_2 mulțimea pe care ea este negativă, rezultă

$$\int_R |a(x,\ dy)| = 2\left|\int_{R_1} a(x,\ dy)\right| = 2|a(x,\ R_1)|. \qquad (14)$$

Aceasta caracterizează o anumită discontinuitate a procesului, deoarece nu am putea avea

$$a(x,\ R_1) = \int_{R_1} a(x,\ dy) = 0$$

pentru fiecare x. Aceasta ar aduce după sine $A^{(n)} \equiv 0$, deci $P = \text{const}$.

Există deci puncte x pentru care $a(x,\ R_1) \neq 0$. Ipoteza (10) se reduce la presupunerea că

$$|a(x,\ R_1)| < A.$$

In acest caz, evident,

$$|A^{(n)}| \leq (2A)^n,$$

seria (12) este absolut convergentă și procesul este bine determinat.

Aceste observații capătă o semnificație mai intuitivă în cazul proceselor *total discontinue ale lui W. Feller*, în care

$$a(x,\ X) = \rho(x)\,[\Pi(x,\ X) - \delta(x,\ X)].$$

In acest caz,

$$a(x,\ R_1) = \rho(x)\,[\Pi(x,\ R_1) - 1].$$

Deoarece

$$\Pi(x,\ R) = 1,$$

este natural ca $\Pi(x,\ R_1) < 1$, deci $a(x,\ x) \neq 0$.

Condiția de mărginire se reduce la

$$\rho(x) < A,$$

condiție, de altfel, deajuns de limitativă.

3. *Procesele lui Kolmogorov.* Presupunem că funcția $a(s, x; X, \Delta)$ nu este continuă față cu Δ, dar satisface următoarele condiții de regularitate:

$$\alpha_\Delta(s, x) = \int_R (y-x)\, a(s, x; dy, \Delta) \underset{\Delta\to 0}{\to} \alpha(s, x), \tag{j}$$

$$\beta_\Delta(s, x) = \int_R (y-x)^2 a(s, x; dy, \Delta) \underset{\Delta\to 0}{\to} \beta(s, x), \tag{j'}$$

$$\int_{|y-x|>\tau} (y-x)^2 a(s, x; dy, \Delta) \underset{\Delta\to 0}{\to} 0 \tag{j''}$$

pentru orice τ pozitiv.

In relația (7), presupunînd că $P(s, y; t, X)$ are primele două derivate continue și uniform mărginite de o constantă M în raport cu y, vom putea scrie:

$$P(s+\Delta, y; t, X) = P(s+\Delta, x; t, X) + \frac{y-x}{1}\frac{\partial P}{\partial x} + \\ + \frac{(y-x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y=x+\theta(y-x)}, \tag{15}$$

$$0<\theta<1.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{\Delta}[P(s+\Delta, x; t, X) - P(s, x; t, X)] = \alpha_\Delta(s, x)\frac{\partial P}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2}\beta_\Delta(s, x)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\int_R a(s, x, dy)(y-x)\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y=x+\theta(y-x)} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right]. \tag{16}$$

Integrala din membrul al doilea se poate descompune într-o sumă de două integrale, dintre care una extinsă la mulțimea măsurabilă R', pe care $(y-x) \leqq \tau$, după ce am ales pe τ suficient de mic pentru ca

$$\left|\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y=x+\theta\tau} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right| < \varepsilon,$$

ε fiind dat.

Vom avea deci

$$\int_R a(s, x; dy, \Delta)(y-x)^2\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{y=x+\theta(y-x)} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right] = \int_{|y-x|\leqq\tau} + \int_{|y-x|>\tau}.$$

Insă, ținînd seamă de alegerea lui τ,

$$\left|\int_{|y-x|\leqq\tau}\right| < \varepsilon \int a(s, x; dy, \Delta)(y-x)^2 = \varepsilon\beta_\Delta(s, x),$$

iar

$$\left| \int\limits_{|y-x|>\tau} \right| \leq 2M \int\limits_{|y-x|>\tau} (y-x)^2 a(s, x; dy, \Delta).$$

Prin urmare, ţinînd seamă de (jj) şi (jjj),

$$\lim_{\Delta \to 0} \left| \int_R \right| < \varepsilon \beta(s, x)$$

oricare ar fi ε. De unde

$$\lim \int_R = 0.$$

Revenind la (16), putem face $\Delta \to 0$ şi obţinem relaţia diferenţială

$$\frac{\partial P(s, x; t, X)}{\partial s} = -\alpha(s, x) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta(s, x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \qquad s<t. \quad (17)$$

Vom presupune în cele ce urmează că X este intervalul deschis la dreapta $[-\infty, y)$ $P(t, x; t, X) = \delta(x, X)$ şi deci

$$P(s, x; t, X) = F(s, x; t, y),$$

şi că există o densitate de repartiţie

$$\rho(s, x; t, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

In acest caz, ecuaţia (17) se poate scrie şi pentru densitatea $\rho(t, y)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = -\alpha(s, x) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta(s, x) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \qquad s<t. \quad (18)$$

Densitatea de repartiţie $\rho(s, x; t, y)$ este atunci soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial \varphi(s, x)}{\partial s} = -\alpha(s, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta(s, x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad s<t, \quad (19)$$

care verifică condiţiile limită ($s=t$):

$$\int_X \rho(t, x; t, y)\, dy = \delta_x(x, X). \quad (19')$$

Relaţia funcţională fundamentală (1) se poate transcrie pentru densitatea $\rho(s, x; t, y)$, dacă există

$$\rho(s, x; t, y) = \int_R \rho(s, x; u, z)\, \rho(u, z; t, y)\, dz. \quad (20)$$

Derivînd în ambii membri ai acestei egalităţi în raport cu z şi ţinînd seama de (18), obţinem:

$$0=\int_R \frac{\partial \rho(s, x; u, z)}{\partial u}\rho(u, z; t, y)\,dz - \int_R \rho(s, x; u, z)\,\alpha(u, z)\frac{\partial \rho(u, z; t, y)}{\partial z} - \int \rho\beta\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\,dz.$$

Integrînd prin părţi şi observînd că ρ şi $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ sînt nuli pentru $y=\pm\infty$, obţinem:

$$\int_R\left[\frac{\partial \rho(s, x; u, z)}{\partial u}+\frac{\partial[\alpha(u, z)\rho]}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(u, z)\rho)}{\partial z^2}\right]\rho(u, z; t, y)\,dz=0,$$

de unde, integrînd faţă cu y pe mulţimea X şi înlocuind paranteza cu $\Phi(s, x; u, z)$, avem:

$$\int_R \Phi(s, x; u, z)\,P(u, z; t, X)\,dz=0.$$

Dacă facem $u=t$, această egalitate se transformă în

$$\int_R \Phi(s, z; t, z)\,\delta(z, X)\,dz=0.$$

Dacă X este un interval elementar $y, y+dy$, egalitatea precedentă dă $\Phi(s, x; t, y)=0$, deci $\rho(s, x; t, y)$ verifică ecuaţia

$$\frac{\partial \rho(s, x; t, y)}{\partial t}=-\frac{\partial(\alpha(t, y)\rho)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(t, y)\rho)}{\partial y^2};$$

$\rho(s, x; t, y)$ este, prin urmare, soluţia ecuaţiei *Fokker-Planck*, adjuncta ecuaţiei (19):

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial t}=-\frac{\partial(\alpha(t, y)\psi)}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(t, y)\psi)}{\partial y^2} \qquad t>s, \qquad (21)$$

cu condiţia la limită

$$\int_X \psi(t, y)\,dy=\delta(x, X) \qquad (21')$$

pentru orice X.

4. *Procesul de difuzie. Mişcarea browniană.*

Procesul aleator $P(s, x; t, X)$, a cărui densitate verifică (19) sau (21), corespunde, aşa cum se recunoaşte pe identitatea de ecuaţii, cu procesul de difuzie sau de propagare a căldurii care este reprezentat de o ecuaţie de tip (21).

Scanned with OKEN Scanner

De aici deducem şi posibilitatea reprezentării unui proces de difuziune ca un proces stochastic înlănţuit.

Mişcarea browniană inerţială, adică mişcarea considerată în lipsa unor forţe exterioare, este de asemenea susceptibilă de interpretarea (21) ca un proces stochastic.

Pentru a da o formă mai completă procesului aleator $P(s, x; t, X)$, adăugăm şi termenul care rezultă din primul tip de propagare, aşa cum este dat de ecuaţia (6), după ce ntroducem densitatea de repartiţie. Va trebui să presupunem $a(t, z, dy) = b(t, z, y)\,dy$ şi relaţia (6) devine

$$\frac{\partial \rho(s, x; t, y)}{\partial t} = \int_R \rho(s, x; t, z)\, b(t, z, y)\, dz.$$

Ecuaţia de propagare va lua forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\alpha(t, y)\rho)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\beta(t, y)\rho)}{\partial y^2} + \int_R \rho(s, x; t, z)\, b(t, z, y)\, dz.$$

5. *Ecuaţiile de propagare în spaţiu* se obţin prin procedee asemănătoare. Dăm direct aceste ecuaţii, în care folosim pentru prescurtare şi scrierea vectorială $y(y_1, y_2, y_3)$ etc.:

$$\frac{\partial \rho(s, x; t, y)}{\partial t} = -\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial(\alpha_j(t, y)\rho)}{\partial y_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1,2,3} \frac{\partial^2(\beta_{jk}(t, y)\rho)}{\partial y_j\, \partial y_k} +$$

$$+ \int_{R^3} \rho(s, x; t, z)\, b(t, z, y)\, dz_1 dz_2 dz_3.$$

6. Pentru mişcarea browniană, în care intervin şi forţe de rezistenţă precum şi perturbaţii aleatorii, trebuie numai să adăugăm termeni aleatori care depind de împrejurările specifice.

7. *Integrarea sistemului* (21), (21′). Vom considera cazul particular în care α şi β sînt constante. Deoarece $\beta > 0$, vom pune $\beta = k^2$. Sistemul devine

$$\frac{\partial \psi(t, y)}{\partial t} + \alpha\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad t > s, \tag{22}$$

$$\int_X \psi(s, y)\, dy = \delta(x, X). \tag{22′}$$

Vom folosi pentru integrare transformata Fourier a funcţiei ψ:

$$\psi(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\eta}\, \chi(t, \eta)\, d\eta. \tag{23}$$

Inlocuind în (22), obţinem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\eta}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}+\left(i\alpha\eta+\frac{1}{2}k^2\eta^2\right)\chi\right)d\eta=0.$$

Este dar necesar şi suficient ca χ să verifice ecuaţia

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\left(i\alpha\eta+\frac{1}{2}k^2\eta^2\right)\chi,$$

a cărei soluţie este

$$\chi(t,\eta)=\chi(s,\eta)\,e^{-\left(i\alpha\eta+\frac{1}{2}k^2\eta^2\right)(t-s)}. \tag{24}$$

Aplicînd în (23) formula de inversiune, obţinem:

$$\chi(t,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\eta}\psi(t,y)\,dy.$$

Aplicînd ecuaţia (22′) pentru $t=s$, găsim:

$$\chi(s,\eta)=\frac{1}{2\pi}e^{-is\eta},$$

prin urmare

$$\chi(t,\eta)=\frac{1}{2\pi}e^{-is\eta-\left(i\alpha\eta+\frac{1}{2}k^2\eta^2\right)(t-s)},$$

care dă, în (23),

$$\psi(t,y)=\rho(s,x;t,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[y-x+\alpha(t-s)]\eta-\frac{1}{2}k^2(t-s)\eta^2}\,d\eta.$$

Deci,

$$\rho(s,x;t,y)=\frac{1}{k\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{[y-x+\alpha(t-s)]^2}{2k^2(t-s)}}. \tag{25}$$

Obţinem astfel densitatea unui proces omogen şi în timp şi în spaţiu.

Această funcţie verifică şi ecuaţia (19).

In cazul particular $\alpha=0$, ecuaţia este

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\qquad t>s,$$

iar soluția care verifică ecuația (22′) este

$$\rho(s, x; t, y) = \frac{1}{k\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2k^2(t-s)}}.$$

§ 3. Evoluția unei mărimi asociată unui proces Markov omogen

1. *Ecuația funcțională Smoluhovski-Hostinski.* Fie V o parte conexă mărginită a unei varietăți analitice dintr-un spațiu euclidian. Vom însemna cu $p, q, \ldots$ diferitele puncte din V. Fie $\rho(p)$ o funcție integrabilă și pozitivă pe V și

$$\int_V \rho(p)\, dp = 1.$$

Presupunem că $\rho(p)$ este densitatea de repartiție a unui proces Markov omogen, prin urmare ρ este în același timp funcție de intervalul de timp t al procesului și de poziția inițială q.

Relația caracteristică procesului ia, în acest caz, forma

$$\rho(q, p, t_1 + t_2) = \int_V \rho(q, r, t_1)\, \rho(r, p, t_2)\, dr, \tag{1}$$

pe care o vom numi Smoluhovski-Hostinski.

2. *Convergența valorii medii cînd* $t \to \infty$. Efectul procesului asupra evoluției mărimii $F(p)$ se manifestă prin alura valorii medii a acestei mărimi. Studiul său este ajutat de următoarea

Teoremă ergodică. Dacă valoarea medie

$$\bar{F}(q, t) = \int_V \rho(q, p, t)\, F(p)\, dp \tag{2}$$

există pentru orice q din V și orice $t \geq 0$, presupunînd că este îndeplinită și condiția (1), atunci

$$\lim_{t \to \infty} \bar{F}(q, t) = \bar{F}$$

există și este independentă de q.

Pentru demonstrație să observăm că din (2) și (1) rezultă

$$\bar{F}(q, t+\tau) = \int_V \rho(q, p, t+\tau)\, F(p)\, dp = \int_V \rho(q, r, \tau)\, \bar{F}(r, t)\, dr. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$\bar{F}(q', t+\tau) - \bar{F}(q'', t+\tau) = \int_V (\rho(q', r, \tau) - \rho(q'', r, \tau))\, \bar{F}(r, t)\, dr \quad (4)$$

pentru oric e pereche de puncte q', q'' din V.

Vom c onsidera acele puncte q' şi q'' pentru care

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}(q', t+\tau) &\geqq \bar{F}(q, t+\tau) \\ \bar{F}(q'', t+\tau) &\leqq \bar{F}(q, t+\tau) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

pentru toate punctele q din V, în afară, eventual, de o mulţime de puncte de măsură nulă.

Să notăm cu V' mulţimea de puncte r pe care $\rho(q', r, \tau) - \rho(q'', r, \tau)$ este pozitivă şi cu V'' mulţimea pe care această diferenţă este negativă sau nulă; vom pune

$$\beta'(r) = \rho(q', r, \tau) - \rho(q'', r, \tau) \quad \text{pentru} \quad r \in V',$$

$$\beta''(r) = \rho(q'', r, \tau) - \rho(q', r, \tau) \quad \text{pentru} \quad r \in V''.$$

Este evident că

$$\int_{V'} \beta'(r)\, dr = \int_{V''} \beta''(r)\, dr = h_{q', q''}.$$

Să arătăm mai întîi că $h_{q', q''} < 1$. In adevăr, dacă am presupune că $h_{q', q''} = 1$, ar rezulta că

$$\rho(q', r, \tau) \geqq \rho(q'', r, \tau)$$

aproape peste tot. Dar atunci egalitatea

$$\int_V \rho(q', r, \tau)\, dr = \int_V \rho(q'', r, \tau)\, dr = 1$$

arată că

$$\rho(q', r, \tau) = \rho(q'', r, \tau)$$

aproape peste tot, oricare ar fi q' şi q'', ceea ce înseamnă că $\rho(q, r, \tau)$ nu depinde efectiv de q, contrar ipotezelor.

Valoarea lui $h_{q', q''}$ se mai poate scrie $h_{q', q''} = P(q', V', \tau) - P(q'', V', \tau) = P(q', V'', \tau) - P(q'', V'', \tau) = 1 - [P(q', V', \tau) + P(q'', V'', \tau)]$.

Vom presupune că: oricare ar fi desfacerea $V = V' \cup V''$ $(V' \cap V'' = \Phi)$ şi oricare ar fi ε, există $\tau < \varepsilon$ pentru care

$$\inf [P(q', V', \tau) + P(q'', V', \tau)] = h > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu notaţiile de mai sus (4) se poate scrie

$$\bar{F}(q', t+\tau) - \bar{F}(q'', t+\tau) = \int_{V'} \beta'(r)\,\bar{F}(r,t)\,dr - \int_{V''} \beta''(r)\,\bar{F}(r,t)\,dr. \quad (6)$$

Membrul al doilea este mai mic decît $F(K', t)\,h_{q', q''} - F(K'', t)\,h_{q', q''}$, unde K' şi K'' verifică inegalităţi de tipul (5), pentru timpul t.

Dacă notăm

$$\Delta_t = \bar{F}(K', t) - \bar{F}(K'', t),$$

atunci din (6) şi observaţia care o urmează rezultă

$$\Delta_{t+\tau} \leq h\Delta_t.$$

Dacă luăm $t=(n-1)\tau$, egalitatea precedentă dă

$$\Delta_{n\tau} \leq h^n \Delta_\tau.$$

Prin urmare, avînd $h<1$, $\lim_{n\to\infty} \Delta_{n\tau} = 0$. De unde, în general,

$$\lim_{t\to\infty} \Delta_t = 0,$$

ceea ce arată că *există limita unică, determinată,*

$$\lim_{t\to\infty} \bar{F}(q,t) = \bar{F}, \quad (7)$$

independentă de q, indicată de teoremă.

3. *Evoluţia unui proces definit de funcţia* $A(p,q,t)$. Valoarea medie respectivă este

$$\bar{A}(q,r,t,\tau) = \int_V \rho(q,p,t)\,A(p,r,\tau)\,dp. \quad (8)$$

La limită se obţine în condiţia (i) o funcţie $A(r,\tau)$:

$$\lim_{t\to\infty} A(q,r,t,\tau) = A(r,t). \quad (9)$$

In cazul particular $A(p,r,\tau) = \rho(p,r,\tau)$ vom avea $A(q,r,t,\tau) = \rho(q,r,t+\tau)$, prin urmare cînd $t\to\infty$ limita nu mai depinde de τ şi avem:

$$\lim_{t\to\infty} \rho(q,r,t) = R(r), \quad (10)$$

cu proprietăţile evidente

$$R(r) \geq 0, \quad \int_V R(r)\, dr = 1.$$

Prin urmare, în ecuaţia

$$\rho(q, r, t+\tau) = \int_V \rho(q, p, t)\, \rho(p, r, \tau)\, dp$$

putem face $t \to \infty$ şi obţinem:

$$R(r) = \int_V R(p)\, \rho(p, r, \tau)\, dp \tag{11}$$

pentru orice τ, unde $R(r)$ este dat de (10) şi reprezintă o soluţie stabilă a ecuaţiei funcţionale a lui *Smoluhovski-Hostinski*.

4. *Ecuaţiile evoluţiei mărimii* $\overline{F}(q, t)$. Vom deosebi în acest studiu două cazuri:

1°. Presupunem

$$\int_A \rho(q, r, \tau)\, dr = \delta(q, A) + \tau \int_A \omega(q, r)\, dr + 0(\tau) \tag{12}$$

pentru orice mulţime măsurabilă A din V.

In aceste condiţii, relaţia (3) ne dă

$$\frac{\overline{F}(q,\ t+\tau) - \overline{F}(q,\ t)}{\tau} = \int_V \omega(q,\ r)\, \overline{F}(r,\ t)\, dr + \frac{0(\tau)}{\tau}.$$

Cînd τ tinde către zero, obţinem ecuaţia integrodiferenţială

$$\frac{\partial \overline{F}(q, t)}{\partial t} = \int_V \omega(q,\ r)\, \overline{F}(r,\ t)\, dr \qquad (t > 0), \tag{13}$$

cu condiţia iniţială

$$\overline{F}(q,\ 0) = F(q), \tag{14}$$

unde $F(q)$ este funcţia originală.

Din (12) rezultă că

$$\int_A \omega(q,\ r)\, dr \begin{cases} \leq 0 & \text{dacă} \quad q \in A, \\ \geq 0 & \text{dacă} \quad q \in V - A. \end{cases}$$

In particular,

$$\int_A \omega(q,\ r)\, dr + \int_{V-A} \omega(q,\ r)\, dr = 0.$$

Oricît de restrîns este domeniul A din V dacă $q \in A$, avem deci

$$\int_V |\omega(q, r)|\, dr \leq 2 \int_A |\omega(q, r)|\, dr.$$

Vom presupune că există ω astfel că, oricare ar fi $q \in V$, există A oricît de restrîns, astfel ca

$$\int_A |\omega(q, r)|\, dr < \omega.$$

Rezultă că avem întotdeauna

$$\int_V |\omega(q, r)|\, dr \leq \omega.$$

In aceste condiţii, soluţia sistemului (13) este

$$\overline{F}(q, t) = F(q) + t \int_V \omega(q, r_1) F(r_1)\, dr_1 +$$

$$+ \frac{t^2}{1 \cdot 2} \int_V dr_1 \int_V \omega(q, r_1)\, \omega(r_1, r_2) F(r_2)\, dr_2 + \ldots,$$

a cărei convergenţă, pentru orice t, este evidentă.

2°. Fie

$$\int_A \rho(q, r, \tau)\, dr = \overline{0}(q, A) + \tau \int_A \omega(q, r, \tau)\, dr,$$

cu următoarele presupuneri:

V este un domeniu din spaţiul euclidian cu m dimensiuni R^m.

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt coordonatele punctului p, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ coordonatele punctului q şi $z_1, z_2, \ldots, z_m$ coordonatele punctului r, presupunem îndeplinite condiţiile

$$\int_V (x_j - z_j)\, \omega(q, r, \tau)\, dr \underset{\tau \to 0}{\to} a_j(q),$$

$$\int_V (x_j - z_j)(x_k - z_k)\, \omega(q, r, \tau)\, dr \underset{\tau \to 0}{\to} b_{jk}(q),$$

$$\int (x_j - z_j)(x_k - z_k)\, \omega(q, r, \tau)\, dr \to 0,$$

$$\sum (x_j - z_j)^2 \geq \Delta^2$$

pentru orice Δ.

Scanned with OKEN Scanner

In aceste condiţii, dacă $\overline{F}(q, t)$ admitie dervate de primele două ordine continue şi uniform mărginite în V, atunci ea verifică ecuaţia lui Kolmogorov (§ 2), aşa cum rezultă din însăşi similitudinea de condiţii.

§ 4. Procese aleatorii în lanţ continuu cu legături complete

1. *Ecuaţiile diferenţiale ale procesului.* Notăm cu $1, 2, \ldots, m$ un sistem complet şi finit de evenimente măsurabile din cîmpul $\{E, \mathcal{K}, P\}$.

Pentru orice diviziune a timpului în intervale egale cu Δ se defineşte un lanţ discontinuu cu legături complete dacă se dau probabilităţile de trecere:

$$p_{hk} \equiv \varphi_{hk}(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t); (t, t+\Delta),$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

$p_l(t)$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ fiind probabilitatea stării l la momentul t, aşa cum s-a prezentat în desfăşurarea procesului pînă la acel moment.

In vederea trecerii la un proces continuu în timp, vom presupune:

$$\varphi_{hk} \equiv \delta_{hk} + \Delta\psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t, \Delta), \tag{1}$$

unde δ_{hk} este simbolul lui Kronecker, iar funcţiile ψ_{hk} împlinesc următoarele condiţii:

$$\psi_{hk} \geq 0, \quad \psi_{hk} \leq 0, \quad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} \psi_{hk} = 0; \tag{i}$$

$$\psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t, \Delta) \tag{ii}$$

sînt definite pentru $0 \leq p_i \leq 1$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$, t şi Δ finite oarecare, continue faţă de amîndouă aceste din urmă argumente în acelaşi timp;

$$f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m, t) = \psi_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t, 0) \tag{iii}$$

sînt funcţii continue şi mărginite de toate argumentele în domeniul considerat şi satisfac unele condiţii de tip Lipschitz. Observăm că (i) sînt valabile şi pentru f_{hk} şi că din aceste condiţii rezultă:

$$f_{hk} \leq -f_{hh} \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Procesul de lanț cu legături complete este definit, cu ajutorul probabilităților (1), de relațiile funcționale:

$$p_k(t+\Delta) = \sum_{h=1,\,2,\,\ldots,\,m} p_h(t)\,\varphi_{hk}(p_1(t),\ p_2(t),\ldots,p_m(t);t,\ t+\Delta). \qquad (3)$$
$$k=1,\,2,\ldots,m$$

Acestea devin pentru expresia (2) a probabilităților φ_{hk}:

$$\frac{p_k(t+\Delta)-p_k(t)}{\Delta} = \sum_{h=1,\,2,\,\ldots,\,m} p_k\psi_{hk}(p_1,\ p_2,\ldots,p_m;t,\ \Delta).$$
$$k=1,\ 2,\ldots,m.$$

Deoarece membrul al doilea din aceste egalități are o limită determinată dacă facem $\Delta\to 0$, membrul întîi va avea de asemenea o limită.

Obținem astfel pentru determinarea probabilităților $p_k(t)$ sistemul de ecuații diferențiale:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{h=1,\,2,\,\ldots,\,m} p_k f_{hk}(p_1,p_2,\ldots,p_m;t);\quad t>s, \qquad (J)$$

la care adăugăm condițiile la limită $(t=s)$:

$$p_k(s)=\delta_{lk} \qquad (k=1,\ 2,\ldots,m). \qquad (4)$$

In condițiile enunțate mai sus, soluțiile $p_k(t)$ sînt bine și unic determinate de sistemul (J) și condițiile (4).

In cazul particular în care funcțiile $f_{hk}\equiv g_{hk}(t)$ nu depind de $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_m$, sistemul (J) este identic cu primul sistem al lui Kolmogorov pentru lanțuri Markov continue relative la o mulțime finită de evenimente.

Dacă funcțiile f_{hk} nu depind explicit de timp, lanțul este, după terminologia folosită pentru procesele Markov, omogen.

Pentru a afirma că sistemul (J) cu condițiile la limită (4) corespunde unui proces stochastic, este necesar să demonstrăm că:

Sistemul de soluții $p_1(t),\ p_2(t),\ldots,p_m(t)$ al sistemului (J), (4) satisface relațiile

$$p_k(t)\geq 0,\quad \sum_{k=1,\,2,\,\ldots,\,m} p_k(t)=1. \qquad (5)$$

Deoarece din (i) și (iii) rezultă $\sum_{h=1,\,2,\,\ldots,\,m} f_{hk}=0$, sistemul (J) ne dă:

$$\sum_{k=1,\,2,\,\ldots,\,m} \frac{dp_k}{dt}=0.$$

Deci, ținînd seamă și de (4):

$$\sum p_k = \sum \delta_{kl} = 1.$$

A doua relație din (5) este astfel demonstrată.

Pentru a demonstra prima relație, să presupunem întîi că funcțiile f_{hk} satisfac relațiile mai tari:

$$f_{hk} > 0, \quad \underset{h \neq k}{} \quad f_{hh} < 0, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{j}$$

In acest caz, (J) și (4) ne arată că pentru $t = s$ avem:

$$\left(\frac{dp_k}{dt}\right)_{t=s} = (f_{ik})_{t=s}.$$

Prin urmare,

$$\left(\frac{dp_k}{dt}\right)_{t=s} \begin{cases} > 0 & k \neq l, \\ < 0 & k = l, \end{cases}$$

în corespondență cu $p_k = 0$ $(k \neq l)$ și $p_l = 1$.

Fie acum o valoare t_0 astfel ca $p_h(t) \geq 0$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ pentru $t \leq t_0$ și $p_k(t_0) = 0$.

Din (J) rezultă:

$$\left(\frac{dp_k}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\sum_{h=k} p_h f_{hk}\right)_{t=t_0}.$$

Cum egalitatea $\sum p_h = 1$ ne arată că nu toți $p_h (h \neq k)$ sînt nuli, rezultă din (J) că:

$$\left(\frac{dp_k}{dt}\right)_{t=t_0} > 0.$$

Ca urmare, nici una dintre soluțiile sistemului (J), (4), unde coeficienții verifică și relațiile (J) în loc de (i), nu este negativă și nici mai mare decît unu.

Revenim la un sistem f_{hh}, în care unele dintre funcții pot fi nule pentru anumite valori ale variabilelor.

Funcțiile

$$f^{\alpha}_{hk} = \underset{h \neq k}{f_{hk}} + \alpha; \qquad f^{\alpha}_{hh} = \underset{h,\ k = 1, 2, \ldots, m}{f_{hh}} - (m-1)\alpha \qquad \alpha > 0$$

formează un sistem verificînd condițiile (J) și (iii) pentru orice α pozitiv finit. Potrivit unei teoreme cunoscute, soluția sistemului (J), (4) corespunzătoare unui α finit oarecare, tinde, cînd

$\alpha \to 0$, către soluția sistemului (J), (4) pentru $\alpha = 0$. Cum pentru orice α, $p_k^{\alpha}(t) \geq 0$, vom avea și $p_k(t) = p_k^0(t) \geq 0$, afirmația este demonstrată.

2. *Procesul aleator liniar asociat ecuațiilor* (J). Dacă lanțul definit mai sus se reduce la un lanț Markov, probabilitățile $p_{lk}(s, t)$, soluții ale sistemului (J), (4), verifică relațiile funcționale

$$p_{lk}(s, t) = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} p_{lh}(s, u) p_{hk}(u, t) \qquad (l, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Vom arăta că aceste relații se înlocuiesc, în cazul general al lanțurilor cu legături complete, prin altele de forma:

$$p_{lk}(s, t) = \sum p_{lh}(s, u) \Pi_{hk}(s, u, t) \qquad s \leq u \leq t, \qquad (k)$$

unde $\Pi_{lhk}(s, u, t)$ este un sistem de probabilități condiționate, ale cărui proprietăți, pentru l și s fixe, sînt acele corespunzătoare unui lanț Markov.

Să considerăm soluția sistemului (J), (4) pe care o vom scrie:

$$p_k(t) \equiv p_{lk}(s, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

trecînd sub tăcere, pentru simplificarea scrierii, indicele fix l și momentul fix s. Cu aceste funcții, continue împreună cu derivatele lor de ordinul întîi, $f_{hk}(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_m(t); t)$ devin funcții continue de timp:

$$f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t) = g_{hk}(t), \qquad (6)$$

care verifică condiții corespunzătoare condițiilor (i), (iii), astfel că ecuațiile diferențiale liniare:

$$\frac{dX_k}{dt} = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} X_h g_{hk}(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (J)$$

admit o soluție determinată continuă împreună cu derivata sa de ordinul întîi, pentru condițiile inițiale:

$$[X_h(t)]_{t=u} = \delta_{hk}. \qquad (7)$$

Ținînd seamă de faptul că g_{hk} îndeplinesc condițiile (i):

$$g_{hk} \geq 0, \quad g_{hh} \leq 0, \quad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} g_{hk} = 0,$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

rezultă că soluțiile pe care le vom numi $\Pi_{hk}(u, t)$ $(u \leq t)$ ale sistemului (7) sînt probabilități:

$$\Pi_{hk}(u, t) \geq 0, \quad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} \Pi_{hk}(u, t) = 1,$$

și verifică o relație a lui Chapman:

$$\Pi_{hk}(u, t) = \sum_{l=1, 2, \ldots, m} \Pi_{hl}(u, v)\, \Pi_{lk}(v, t). \tag{8}$$

$$(u \leq v \leq t) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Derivînd în raport cu v în ambii membri ai acestor egalități, obținem:

$$0 = \sum_{l=1, 2, \ldots, m} \left[\frac{\partial \Pi_{hl}(u, v)}{\partial v} \Pi_{hk}(v, t) + \Pi_{hl}(u, v) \frac{\partial \Pi_{lk}(v, t)}{\partial v} \right].$$

Folosind sistemul (J), obținem:

$$0 = \sum_{l=1, 2, \ldots, m} \Pi_{hl}(u, v) \left[\frac{\partial \Pi_{lk}(v, t)}{\partial v} + \sum_{r=1, 2, \ldots, m} g_{lr}(v)\, \Pi_{rk}(v, t) \right].$$

Facem în această relație $v = u$ și ținem seamă de (7); rezultă pentru fiecare h un al doilea sistem de ecuații:

$$\frac{\partial \Pi_{hk}(u, t)}{\partial u} + \sum_{r=1, 2, \ldots, m} g_{hr}(u)\, \Pi_{hk}(u, t) = 0; \quad u < t. \tag{J'}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Pentru a demonstra proprietatea (k), considerăm funcțiile

$$g_k(u, t) = \sum_h p_h(u)\, \Pi_{hk}(u, t). \tag{9}$$

Derivînd în raport cu u, obținem:

$$\frac{\partial g_k}{\partial u} = \sum_h \frac{\partial p_h(u)}{\partial u} \Pi_{hk}(u, t) + \sum_h p_h(u) \frac{\partial \Pi_{hk}(u, t)}{\partial u};$$

ținînd seamă de (J) și (J'), obținem în membrul al doilea zero; deci, $g_k(u, t) = g_k(t)$ nu depinde de u.

Dacă în (9) facem $u = t$, avem:

$$g_k(t) = \sum_h p_h(t)\, \delta_{hk} = p_k(t),$$

deci (9) devine:

$$p_k(t) = \sum_h p_h(u)\, \Pi_{hk}(u, t). \tag{10}$$

Revenind la indicele și la timpul lăsat la o parte, punem în (10) $p_k(t) = p_{lk}(s, t)$, deci $\Pi_{hk}(u, t) = \Pi_{lhk}(s, u, t)$ și obținem relațiile funcționale (k).

Procesul în lanț cu legături complete are deci un lanț Markov ca lanț liniar asociat.

Observație. Relațiile (k) pot servi pentru stabilirea proprietăților (5) ale funcțiilor $p_k(t)$. În adevăr, dacă facem în aceste relații $u = s$, avem $p_{lh}(s, s) = \delta_{lh}$, deci:

$$p_{lk}(s, t) = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} \delta_{lh} \Pi_{lhk}(s, s, t) = \Pi_{llh}(s, s, t).$$

Însă funcțiile $\Pi_{llk}(s, t)$, ca soluții ale sistemului (J), (7), sînt probabilități

$$\Pi_{llk}(s, t) \geq 0, \qquad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} \Pi_{llk} = 1,$$

deci $p_{lk}(s, t)$ verifică relațiile (5).

Lanț cu legături complete stîng. Lanțul definit mai sus se poate numi *lanț la dreapta* sau *drept*. Lanțurile discontinue definite de noi împreună cu Gh. Mihoc sînt *stîngi*. Se poate caracteriza un lanț continuu cu legături complete la stînga prin ecuațiile diferențiale:

$$\frac{dp_h(s)}{ds} = -\sum_{l=1, 2, \ldots, m} f_{hl}(p_1(s), p_2(s), \ldots, p_m(s), s)\, p_l(s)$$

$$p_h(t) = \delta_{hk}. \tag{J''}$$

Spre deosebire de cazul Markov, cele două lanțuri, deși generate de același sistem f_{hl}, nu sînt identice.

3. *Sistem lacunar.* Dacă funcțiile f_{hk}, în afară de condițiile (ii) și (iii), verifică numai inegalitățile:

$$f_{hk} \geq 0, \quad k \neq h \qquad f_{hh} \leq 0, \quad h, k = 1, 2, \ldots, m \qquad \sum_{k=1, 2, \ldots, m} f_{hk} \leq 0,$$

sistemul (J) descrie în chip incomplet procesul de lanț și va fi numit *sistem lacunar*.

Scanned with OKEN Scanner

Vom completa sistemul (J) cu o nouă ecuaţie, cuprinzînd o nouă funcţie p_{m+1}:

$$\frac{dp_{m+1}}{dt} = \sum_h p_h f_{h,\, m+1}(p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m;\ t),$$

unde

$$f_{h,\, m+1} = -\sum_{k=1,\, 2, \ldots, m} f_{hk} \quad h = 1,\ 2, \ldots,\ m.$$

Sistemul (J'), format din (J), şi ecuaţia de mai sus îndeplineşte condiţiile impuse acestui sistem pentru ca $p_1(t)$, $p_2(t), \ldots, p_m(t)$, $p_{m+1}(t)$, determinate prin condiţiile iniţiale:

$$p_h(s) \geq 0 \sum_{h=1,\, 2, \ldots, m,\, m+1} p_h(s) = 1,$$

să verifice aceste condiţii pentru orice t.

Rezultă atunci că sistemul lacunar (J) determină de asemenea un sistem de probabilităţi $p_1(t)$, $p_2(t), \ldots, p_m(t)$ cu condiţiile:

$$p_h(t) \geq 0 \sum_{h=1,\, 2, \ldots, m} p_h(t) \leq 1,$$

dacă aceste condiţii sînt verificate pentru $t = s$. Putem vorbi, în acest caz, dacă trecem la o interpretare intuitivă, de o stare $\omega = m+1$, a cărei probabilitate este:

$$p_\omega(t) = 1 - \sum_{h=1,\, 2, \ldots, m} p_h(t)$$

şi care ar putea fi dispariţia unuia oarecare dintre elementele ale căror stări sînt descrise de proces.

In trecere de la (1) sau (3) la (J), izolarea unui sistem lacunar se realizează dacă $\lim_{\Delta \to 0} \psi_{mk} = f_{mk} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Fenomenul este mai relevant în cazul unei mulţimi infinite de stări.

4. *Proprietăţi ergodice globale şi individuale.* Un aspect al proprietăţilor ergodice ale unui lanţ se pune în lumină prin studiul invarianţilor integrali asociaţi sistemului diferenţial (J).

Vom examina problema mai întîi în general, fără a ne limita la condiţiile iniţiale care dau caracterul de probabilităţi celor n funcţii care-l verifică.

Fie deci sistemul:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_h x_h f_{hk}\ (x_1, x_2, \ldots, x_m; t) \qquad (J)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Vom presupune că derivatele de ordinul întîi ale funcţiilor f_{hk} există şi sînt continue într-un domeniu D. Integrala

$$I = \int_V F(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \qquad (11)$$

unde domeniul V este interior lui D, este invariantă pentru ecuaţiile (J) dacă F verifică ecuaţia

$$\frac{dF}{dt} + F\left(\sum_{l=1, 2, \ldots, m} f_{ll} + \sum_{l, k=1, 2, \ldots, m} x_h \frac{\partial f_{hl}}{\partial x_l}\right) = 0. \qquad (12)$$

In cazul particular care corespunde lanţului Markov, ecuaţia devine:

$$\frac{dF}{dt} + F\left(\sum_{l=1, 2, \ldots, m} f_{ll}\right) = 0. \qquad (13)$$

Ştim că $f_{ll}(t) \leqslant 0$ şi că nu putem avea $f_{ll}(t) = 0$ pentru orice l. Prin urmare, putem scrie:

$$\sum_l f_{ll}(t) = -\omega^2(t) < 0.$$

Rezultă:

$$F_t = F_s e^{\int_s^t \omega^2(u)\, du}. \qquad (14)$$

Din (11) avem atunci, notînd cu $V(t)$ volumul domeniului V la momentul t,

$$V(t) = V(s)\, e^{-\int_s^t \omega^2(u)\, du}; \qquad (15)$$

$V(t)$ descreşte indefinit cînd t tinde către infinit. Dacă (J) corespunde unui lanţ omogen, $\omega(t)=\omega$ este constant, prin urmare:

$$V(t)=V(s)\,e^{-(t-s)\,\omega^2}; \tag{16}$$

$V(t)$ tinde către zero cînd t tinde către infinit. Numai dacă $\int_s^t \omega^2(u)\,du$ este convergentă nu avem concentrarea asimptotică puternică exprimată de formula (16).

In cazul general, este de reţinut o împrejurare care nu se poate ivi pentru lanţurile Markov, în care ω nu poate fi nul.

Dacă presupunem că

$$\sum_l f_{ll} + \sum_{l,h} x_h \frac{\partial f_{hl}}{\partial x_l} = \alpha, \tag{17}$$

α fiind constantă, rezultă:

$$V(t)=V(s)\,e^{(t-s)\,\alpha}. \tag{18}$$

Dacă $\alpha>0$, volumul creşte indefinit, punctele se dispersează. Daçă $\alpha<0$, volumul tinde către zero ca şi în cazul lanţului Markov. In sfîrşit, dacă $\alpha=0$, volumul rămîne invariant ca în cazul sistemelor dinamice. In acest caz, fenomenele ergodice de examinat sînt analoge cu acele ale traiectoriilor dinamice.

Exemplu:

$$f_{hl}=\sum_r{}' a^r_{hl}x_r + a_{hl}$$

cu

$$a^r_{hl}>0,\quad a_{hl}>0,\quad h\neq l$$

$$a^r_{ll}<0,\quad a_{ll}<0.$$

Condiţia (17) ne dă:

$$\alpha=\sum_l a_{ll} \leq 0,$$

$$\sum_l \left(a^h_{ll}+a^l_{hl}\right)=0.$$

Deci, dacă toţi a_{ll} sînt nuli, volumul este un invariant. Dacă nu sînt toţi nuli, orice volum tinde către zero cînd t tinde către infinit.

Rezultatele considerate pînă aici nu se pot transpune imediat la procesul stochastic asociat sistemului (J), (4), deoarece acest proces se petrece numai în hiperplanul:

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=1 \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

și în acest hiperplan, în domeniul închis Δ_{m-1}, caracterizat de inegalitățile:

$$0 \leq x_k \leq 1, \quad 0 \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \leq 1 \qquad (20)$$

$$k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Vom considera atunci, în loc de (J), sistemul obținut înlocuind pe x_m cu $1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1}$ și suprimînd ultima ecuație care este dependentă de primele:

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} x_h f_{hl} \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-1). \qquad (J_1)$$

Pentru ca

$$I_{m-1} = \int_{V_{m-1}} F(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{m-1},$$

să fie un invariant al sistemului I, V_{m-1} fiind un domeniu din Δ_{m-1}, este necesar și suficient ca F să fie o soluție a ecuației:

$$\frac{dF}{dt} + F\left[\sum_{l=1, 2, \ldots, m-1} (f_{ll} - f_{ml}) + \sum_{\substack{h=1, 2, \ldots, m \\ l=1, 2, \ldots, m}} x_h \left(\frac{\partial f_{hl}}{\partial x_l} - \frac{\partial f_{hl}}{\partial x_m}\right)\right] = 0.$$

Ținînd seama de (i), această ecuație se reduce la (12), în care presupunem:

$$x_m = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1}.$$

Considerațiile dezvoltate în legătură cu (12) sînt deci valabile și pentru procesul stochastic asociat sistemului (J).

Adăugăm numai că, relațiile (5) fiind verificate oricare ar fi t, vom avea:

$$V_{m-s}(t) \subset \Delta_{m-1},$$

dacă relația este satisfăcută la momentul inițial $t = s$.

Sistemul (J_1), corespunzător lanțului Markov continuu, se poate scrie:

$$\frac{df_l}{dt} = \sum_{h=1, 2, \ldots, m-1} p_h (f_{hl} - f_{ml}) + f_{ml} \qquad (J_1')$$

$$(l = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Dacă numim cu F matricea $\| f_{hl} - f_{ml} \|$, cu $\bar{f}$ vectorul de componente f_{ml} $(l = 1, 2, \ldots, m-1)$, cu τ matricea soluție a ecuației omogene

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau f \qquad \tau(s) = \zeta,$$

soluția generală a ecuației (J_1') se poate scrie:

$$p(t)=\tau(t)\left(\bar{p}(s)+\int_s^t \bar{f}(u)\,\tau^{-1}(u)\,du\right).$$

Condiția necesară pentru ergodicitate a soluției $\bar{p}(t)$ — independența asimptotică de datele inițiale — este prin urmare:

$$\tau(t)\underset{t\to\infty.}{\to}0$$

Dar, pentru ca această condiție să fie îndeplinită, este necesar și suficient ca pentru cel puțin un l să avem:

$$\int_s^t f_{ll}\underset{t\to\infty.}{\to}\infty$$

Dar aceasta este, evident, și o condiție necesară și suficientă pentru ergodicitatea globală.

Ergodicitatea globală, exprimată prin condiția $V(t)\to 0$ cînd $t\to\infty$ este deci necesară pentru ca eventuala limită asimptotică a lui $p(t)$ să nu depindă de $p(s)$. Avem precis:

$$\lim_{t\to\infty}\bar{p}(t)=\lim_{t\to\infty}\tau(t)\int_s^t \bar{f}(u)\,\tau^{-1}(u)\,du,$$

dacă ultima limită există.

Exemplu. Dacă sistemul are două stări, 1 și 2, și dacă punem:

$$f_{21}=g(t),\quad -f_{11}(t)=g(t),\quad f_{21}\geq 0,\quad g(t)\geq 0,$$

sistemul (J_1') devine:

$$p_1'+[f(t)+g(t)]\,p_1-g(t)=0.$$

Condiția de ergodicitate globală este:

$$\int_s^t [f(u)-g(u)]\,du\to\infty,\quad t\to\infty.$$

Aceasta fiind îndeplinită, găsim:

$$\lim p_1(t)=\lim\frac{g(t)}{g(t)+f(t)}\qquad (t\to\infty),$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă limitele pentru $f(t)$ și $g(t)$, cînd $t\to\infty$, există și $g(\infty)\neq 0$. In acest caz, evident:

$$\lim p_2(t) = \lim \frac{f(t)}{f(t)+g(t)}.$$

Proprietățile ergodice ale lanțului cu legături complete (J) se pot cerceta, cel puțin în anumite cazuri, cu ajutorul lanțului Markov asociat (J_1), (7) și a relației (10).

In adevăr, dacă $p_{lk}(s, t)$ tinde către o limită cînd $t\to\infty$ și dacă această limită este independentă de condițiile inițiale, vom avea:

$$\lim_{t\to\infty} p_{lk}(s, t) = \lim_{t\to\infty} \Pi_{llk}(s, s, t) = p_k.$$

O condiție pentru ergodicitatea lanțului Markov corespunzător probabilităților $\Pi_{lhk}(s, u, t)$ pentru un l și un s dați, este ca să existe h_0 și k_0 astfel ca:

$$f_{h_0k_0} \geq \alpha > 0 \qquad \text{oricare ar fi } t,$$

deoarece, în acest caz:

$$f_{h_0k_0}(t) \leq -\alpha; \quad \int_s^t f_{h_0k_0}(u)\,du \to \infty \quad \text{cînd} \quad t\to\infty.$$

Aceasta este, de altfel, împreună cu mărginirea funcțiilor ψ_{hk} și a derivatelor lor de ordinul întîi față de fiecare dintre argumente, o condiție suficientă pentru ca lanțul discontinuu cu legături complete generat de (1) să fie ergodic [(1), (2), (3), (7)]. Pentru un proces finit de tip Feller (6), în care avem:

$$f_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t) =$$

$$= \varphi_h(p_1, p_2, \ldots, p_m; t)\,[\rho_{hk}(p_1, p_2, \ldots, p_m; t) - \delta_{hk}],$$

unde $\varphi_h \geq 0$, φ_{hk} este un sistem de probabilități, este evident suficient ca să existe un h_0 astfel ca:

$$\varphi_{h_0} > \alpha > 0$$

pentru orice valori ale argumentelor.

5. *Lanțuri de soluții ale sistemelor de ecuații diferențiale.* Un sistem

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{h=1, 2, \ldots, m} x_h f_{hk}(x_1, x_2, \ldots, x_m; t) \qquad (k=1, 2, \ldots, m), \quad (21)$$

în care f_{hk} sînt funcţii mărginite şi continue de toate argumentele într-un domeniu $D \times |T_1, T_2|$ din $R^n \times R$ satisfăcînd în plus, în acest domeniu, o condiţie de tip Lipschitz, are o integrală

$$x_k(t) = h_k(t, s; a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{22}$$

continuă împreună cu derivata de ordinul întîi, aparţinînd domeniului D pentru $t \in [T_1, T_2]$ dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$, reprezentînd poziţia la momentul s, aparţin lui D şi $s \in [T_1, T_2]$.

Introducînd în $f_{hk}(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ valorile (22), vom obţine funcţiile

$$g_{hk}(t) = f_{hk}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t); t) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m), \tag{23}$$

mărginite şi continue pentru $t \in [T_1, T_2]$.

Fie acum sistemul liniar

$$\frac{dY_k}{dt} = \sum_{h=1,2,\ldots,m} Y_h g_{hk}(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{24}$$

şi sistemul de m soluţii $Y_{lk}(u, t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $(l = 1, 2, \ldots, m)$, corespunzînd condiţiilor iniţiale:

$$Y_{lk}(u, u) = \delta_{lk}. \tag{25}$$

Dacă notăm cu $X(u, t)$ matricea $\| Y_{lk}(u, t) \|$, această matrice este soluţia determinată şi unică $(u, t \in [T_1, T_2])$ a ecuaţiei scrisă sub formă matricială:

$$\frac{dY}{dt} = Y(u, t)\, g(t) \qquad (g(t) = \| g_{hk}(t) \|), \tag{26}$$

care, pentru $t = u$, este egală cu matricea unitate:

$$I = \| \delta_{hk} \|.$$

Să considerăm în acelaşi timp cu (26) ecuaţia asociată:

$$\frac{dZ(u, t)}{du} = -g(u)\, Z(u, t), \qquad Z(t, t) = I \tag{27}$$

şi să arătăm că soluţia $Z(u, t)$ este identică cu precedenta:

$$Z(u, t) = Y(u, t).$$

In cazul particular în care matricea g nu depinde de t, soluţiile celor două ecuaţii au aceeaşi expresie şi anume:

$$Y(u, t)=Z(u, t)=I+\sum_{1}^{\infty}{}_{r}\frac{(t-u)^r}{r!}g_r,$$

presupunînd că membrul al doilea este convergent. Dacă $g(t)$ nu este constantă, avem:

$$Y(u, t)=I+\int_u^t g(v_1)\,dv_1+\int_u^t dv_1\int_u^{v_1} g(v_1)\,g(v_2)\,dv_2+\ldots$$

$$\ldots+\int_u^t dv_1\int_u^{v_1} dv_2\int_u^{v_2} g(v_1)\,g(v_2)\,g(v_3)\,dv_3+\ldots$$

şi

$$Z(u, t)=I+\int_u^t g(v_1)\,dv_1+\int_u^t dv_1\int_{v_1}^t g(v_1)\,g(v_2)\,dv_2+\ldots$$

Să observăm imediat că integralele multiple respective sînt egale, de unde teorema enunţată.

Vom nota cu $X(u, t)$ această matrice soluţie în acelaşi timp a ecuaţiilor (24) şi (27). Se verifică imediat că aceste matrice sînt legate prin relaţia lui Chapman[1]):

$$X(u, t)=X(u, v)\,X(v, t) \qquad u, v, t\in[T_1, T_2]. \tag{28}$$

Reluînd problema ecuaţiei (21), presupunem că domeniul D cuprinde toate cele m puncte $(\delta_{lk},\ k=1, 2,\ldots, m,\ l=1, 2,\ldots, m)$ şi notăm cu $x(s, t)$ soluţia pentru care $x_{lk}(s, s)=\delta_{lk}$ pentru orice $l=1, 2,\ldots, m$.

Pentru fiecare dintre aceste soluţii obţinem o matrice:

$$X_l(s, u, t).$$

Demonstrăm imediat că

$$x_{lk}(s, t)=\sum_{h=1, 2,\ldots, m} x_{lh}(s, u)\,X_{lhk}(s, u, t). \tag{29}$$

---

[1]) Se arată mai întîi că derivata membrului al doilea în raport cu v este nulă, ţinînd seamă de (24) şi (27). Scriind $H(u, t)=X(u, v)\cdot X(v, t)$, dacă facem $v=u$, rezultă $H(u, t)=X(u, t)$, deoarece $X(u, u)=I$.

Relația dintre soluțiile ecuației liniare asociate sistemului (21) și soluțiile acestui sistem poate fi foarte utilă pentru studiul acestor soluții, mai ales că (29) ne conduce, dacă facem $u=s$, la egalitățile:

$$x_{lk}(s,\ t)=X_{llk}(s,\ s,\ t).$$

BIBLIOGRAFIE

In afară de bibliografia generală care se găsește la sfîrșitul cap. XIV.

A. Kolmogorov: Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., t. 104, 1931.

A. Kolmogorov: Zur Theorie der stätigen zufälligen Prozesse, Math. Ann. 108, 1933.

A. Kolmogorov: Zur Theorie der Markoffschen Ketten, Math. Ann. 112, 1936.

W. Feller: On the integrodifferential equations of purely discontinous Marcov processes, Trans. of the Ann. Math. Soc., t. 54, 1943.

A. Hincin: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1933.

J. Bars: Les functions aléatoires et leur interprétation mécanique, Revue Scientifique, ianuarie 1945.

O. Onicescu: Procese aleatoare în lanț continuu cu legături complete, Revista Universității București, 1954.

R. Rodeanu: O teoremă privind comportarea asimptotică a lanturilor continue în timp, Revista Universității nr. 8, București, 1955.

CAPITOLUL IX

PROBABILIZAREA EVENIMENTELOR ÎN MECANICA STATISTICĂ

Obiectele Mecanicii statistice sînt mărimile scalare sau vectoriale asociate unui sistem mecanic format dintr-un număr foarte mare de componente.

Aceste mărimi se prezintă, din punct de vedere matematic, ca variabile sau funcții aleatorii ale unui cîmp de probabilitate.

Constituirea adecvată a acestui cîmp este primul obiectiv al Mecanicii statistice.

Mulțimea E a evenimentelor elementare constituie, în Mecanica statistică clasică, *spațiul fazelor* al lui W. Gibbs. Evenimentele sînt mulțimile măsurabile ale acestui spațiu cu $2n$ dimensiuni, dacă n este numărul gradelor de libertate. Măsura Lebesgue a acestor mulțimi este invariantă, potrivit teoremei

lui Liouville. Ea are deci o semnificaţie fizică şi poate constitui o bază pentru construirea unui cîmp de probabilitate. Vom arăta cum se formează cîmpul de probabilitate canonic sau cîmpurile microcanonice, după terminologia lui Gibbs.

Cîmpurile constituite pe spaţiul fazelor nu reflectează, în general, evoluţia în timp a sistemelor, deoarece în ele timpul nu intervine explicit.

Teorema ergodică a lui Birkhof ne poate lăsa să credem că introducerea timpului în Mecanica statistică este inutilă, deoarece media în timp a unei mărimi mecanice asociată cîmpului tinde — în anumite condiţii — către media sa spaţială.

Condiţiile de aplicare ale teoremei ergodice ne arată, însă, că limitele ei sînt mai restrînse de cum apare la prima vedere, deoarece, în evoluţia unui sistem mecanic cu un număr mare de componente, intervin interacţiunile cu schimb de energie între componente, ceea ce adaugă la proprietăţile mecanice ale sistemului, proprietăţi al căror enunţ are caracteristice pur statistice.

De aceea, este necesar să luăm în considerare *spaţiu fază-timp* cu $2n+1$ dimensiuni, cea de a $2n+1$-a dimensiune corespunzînd timpului. Secţiunea pentru fiecare t dat în acest spaţiu S_{2n+1} este spaţiul fază, oglindind starea sistemului la momentul t.

In acest spaţiu fază-timp îşi găsesc semnificaţie două mărimi fizice deosebit de importante :

1) *numărul interacţiunilor* (violente) cu schimb de energie, dintre componentele sistemului, într-un interval de timp (t_1, t_2), pe care-l vom reprezenta prin $H(t_1, t_2)$;

2) *numărul componentelor* care intră în interacţiune în intervalul (t_1, t_2), pe care-l vom reprezenta prin $K(t_1, t_2)$.

Pentru numeroase sisteme avem $K(t_1, t_2)=2H(t_1, t_2)$, întrucît componentele intră în interacţiune, în general, cîte două şi interacţiunea durează un timp neglijabil.

Există însă împrejurări în care interacţiunile sînt multiple; în acest caz, funcţiile K şi H trebuie să fie determinate fiecare în parte. Circumstanţele sînt mai complicate dacă prin interacţiuni se produc aglomerări sau disocieri de componente, în care caz cele două funcţii nu sînt suficiente pentru descrierea evoluţiei sistemului.

In cele ce urmează ne vom ocupa numai de sistemele cele mai simple.

Scanned with OKEN Scanner

Deosebirea esențială între Mecanica statistică clasică și cea cuantică constă în structura geometrică a spațiului fazelor.

Acest spațiu este continuu în Mecanica clasică, dar discontinuu, în sensul care urmează să fie precizat, în Mecanica cuantică.

Timpul, în construirea spațiului fază-timp, poate fi considerat în ambele Mecanici ca o variabilă continuă sau discontinuă, după împrejurări. Va trebui, în genere, să deosebim timpul proceselor mecanice individuale ale diferitelor componente, între două interacțiuni, *timp continuu* și în Mecanica cuantică, de timpul care figurează în funcțiile H sau K și care poate fi, în genere, tratat ca discontinuu, ca *timp spectral.*

Inainte de a cerceta construirea cîmpurilor de probabilitate ale Mecanicii statistice clasice, vom examina cîteva dintre problemele de repartiție care nu au așteptat precizia actuală a teoriei probabilităților pentru a căpăta o rezolvare. Cea dintîi problemă este aceea a repartiției vitezelor unui gaz. Ea a constituit piatra de încercare a diferitelor edificii ale teoriei cinetice, la început, ale mecanicii statistice clasice la urmă, precum și modelul statisticilor lui Einstein și Fermi, pe care, deși aparțin mecanicilor statistice cuantice, le vom prezenta o dată cu teorema lui Maxwell-Boltzman.

§ 1. Legea de repartiție a energiei într-un gaz ideal

1. *Teorema lui Maxwell.* Demonstrația originară a lui Maxwell pentru legea de repartiție a vitezelor moleculelor unui gaz ideal, compus dintr-un singur fel de molecule, în echilibru termic într-un recipient, urmărește să organizeze direct spațiul euclidian al vitezelor moleculare (vitezele diferitelor molecule) cu un cîmp de probabilitate. Cîmpul de evenimente este constituit din mulțimile boreliene ale acestui spațiu, cuprinzînd în particular intervalele spațiale. Pentru construirea probabilității, se face mai întîi ipoteza simplificatoare că distribuția este continuă și că avem o densitate de repartiție.

Presupunem deci că Ω fiind un domeniu măsurabil din spațiul R^3 al vitezelor, probabilitatea ca o viteză $V(u, v, w)$ a unei molecule a gazului să se găsească în Ω este

$$P = \int_{\Omega} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw. \qquad (1)$$

Funcţia $f(u, v, w)$ trebuie să îndeplinească condiţiile de a fi pozitivă, integrabilă şi

$$\int_{R^3} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw = 1. \tag{2}$$

In limbajul obişnuit fizicienilor vom spune, conform definiţiei de mai sus a funcţiei f, că nP este numărul de molecule ale căror viteze sînt reprezentate în Ω.

Determinarea densităţii de repartiţie f este bazată pe următoarele ipoteze:

1°. Densitatea de probabilitate ca o moleculă a gazului să aibă viteza v depinde numai de valoarea acestei viteze şi se va nota $f(u^2+v^2+w^2)$, dacă u, v, w sînt cele trei componente rectangulare ale vectorului V.

2°. Densitatea de probabilitate ca o moleculă a gazului să aibă o componentă a vitezei într-o direcţie fixă, oarecare, depinde numai de mărimea α a acestei componente şi este de forma $af(\alpha^2)$, unde a nu depinde de α.

3°. Cele trei componente u, v, w ale vitezei V a moleculei sînt variabile aleatorii independente între ele.

Din 3° rezultă că densitatea de probabilitate a moleculelor cu viteza V este $a^3 f(u^2) f(v^2) f(w^2)$.

Comparînd cu expresia dată în 1° pentru aceeaşi mărime, obţinem ecuaţia funcţională

$$f(u^2+v^2+w^2) = a^3 f(u^2) f(v^2) f(w^2). \tag{3}$$

Pentru demonstraţia propriu-zisă a teoremei lui Maxwell rămîne numai să arătăm că unica densitate de repartiţie care verifică această ecuaţie este cea gaussiană.

Dacă punem $f(u) = a^{-\frac{3}{2}} \varphi(u)$, găsim ecuaţia funcţională

$$\varphi(u^2)\, \varphi(v^2)\, \varphi(w^2) = \varphi(u^2+v^2+w^2), \tag{4}$$

care are ca singură soluţie regulată în întreg spaţiul, nulă la infinit, funcţia

$$\varphi(u^2) = e^{-k^2 u^2}.$$

Prin urmare, densitatea de repartiţie a moleculelor cu viteza u, v, w este

$$f(u^2+v^2+w^2) = he^{-K^2(u^2+v^2+w^2)}, \tag{5}$$

unde K şi h sînt legate între ele prin condiţia (2).

Teorema lui Steinhaus. O restringere a ipotezelor 1°, 2° şi 3° se realizează cu ajutorul următoarei *teoreme a lui Steinhaus*, a cărei demonstraţie o lăsăm cititorului.

Fie $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ componentele carteziene ale unui vector, funcţii de parametrul $\alpha\,(0 \leq \alpha \leq 1)$. Presupunem că acest vector este aproape pretutindeni regulat. Presupunem de asemenea că componenta sa $lu(\alpha)+mv(\alpha)+nw(\alpha)$ după direcţia cu cosinuşii directori l, m, n are o distribuţie care nu depinde de aceşti cosinuşi.

Condiţia necesară şi suficientă pentru independenţa variabilelor aleatorii $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ este ca aceste variabile să fie gaussiene.

2. *Teorema lui Boltzmann.* Teorema lui Boltzmann asupra densităţii de repartiţie după viteză a moleculelor unui gaz, închis într-un recipient A, menţinut la temperatură exterioară constantă, se referă nu numai la starea de echilibru statistic considerată de Maxwell, ci şi la evoluţia gazului pînă la realizarea acestei stări. Dacă notăm cu $f(u, v, w, t)$ densitatea de repartiţie la momentul t, starea gazului este caracterizată, după Boltzmann, de funcţia

$$H(t)=\int_{R^3} f \ln f \, du\, dv\, dw. \tag{6}$$

Această teoremă are următorul enunţ: *$H(t)$ este o funcţie monotonă necrescătoare de t; valoarea ei minimă corespunde regimului staţionar şi este realizată de o repartiţie gaussiană.*

Demonstraţia care urmează se referă numai la a doua parte a teoremei. Nu există o demonstraţie satisfăcătoare pentru prima parte. In orice caz, interesul acestei prime părţi transcende calculul probabilităţilor şi deci nu îşi găseşte locul aici.

Pentru a construi cîmpul de probabilitate, vom observa că mişcarea fiecărei molecule este rectilinie şi uniformă între două ciocniri, iar în timpul unei ciocniri se face cu conservarea cantităţii de mişcare. Reamintim că analiza noastră se referă la un gaz monoatomic ideal. Masele diferitelor molecule sînt egale.

Să considerăm spaţiul euclidian cu $3n$ dimensiuni R_{3n} şi un punct P avînd coordonatele

$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ u_2,\ v_2,\ w_2, \ldots, w_n$$

unde u_i, v_i, w_i sînt cele trei componente ale vitezei unei molecule determinate M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă la un moment dat nu are loc nici o ciocnire, toate coordonatele punctului P rămîn constante.

Dacă, la un alt moment, are loc o ciocnire, între componentele vitezelor după ciocnire şi cele dinainte de ciocnire, ale celor două molecule care se ciocnesc, au loc relaţii pe care nu le reproducem aici; aceste relaţii se pot încadra într-o transformare canonică, al cărei determinant funcţional este, aşa cum vom vedea, egal cu unitatea.

Deci, în toate cazurile, ecuaţiile mişcării punctului reprezentativ P pot fi interpretate ca o transformare a spaţiului în el însuşi, cu determinant funcţional egal cu unitatea, deci cu conservarea volumului.

Fie o mulţime boreliană din R_{3n} care se transformă, prin efectul mişcării, într-o mulţime boreliană cu conservarea măsurii Lebesgue corespunzătoare.

Dacă pentru moleculele gazului considerat avem

$$|u_i|, \quad |v_i|, \quad |w_i| < l,$$

atunci hipercubul Ω_l cu $3n$ dimensiuni

$$|u_1| \leq l, \quad |v_1| \leq l, \quad |w_1| \leq l, \ldots, \quad |w_n| \leq l$$

poate fi considerat ca fiind cîmpul evenimentelor elementare ale sistemului: mulţimile boreliene sînt evenimentele, iar măsura Lebesgue a unei mulţimi raportată la $(2l)^{3n}$ este probabilitatea corespunzătoare.

Să dividem cubul ω_l

$$|u_i| \leq l, \quad |v_i| \leq l, \quad |w_i| \leq l$$

în N^3 cuburi sau celule egale, cu latura $\frac{2l}{N}$, şi să numerotăm aceste cuburi de la 1 la N^3. Vectorii (u, v, w) corespunzînd unuia dintre aceste cuburi diferă foarte puţin între ei, dacă N este suficient de mare:

$$P = p_{l,N} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\nu!} \tag{7}$$

cu condiţia

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu = n. \tag{8}$$

Să adăugăm şi condiţia că energia sistemului este dată:

$$n_1 e_1 + n_2 e_2 + \ldots + n_\nu e_\nu = E, \tag{9}$$

unde e_i este energia cinetică corespunzătoare fiecărei molecule din celula C.

Determinarea repartiției stabile. Folosim în acest scop următorul principiu:

Repartiția stabilă este aceea care corespunde celui mai mare număr de modele, adică aceea care corespunde probabilității P maxime.

Repartiția stabilă corespunde deci acelor numere $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ care realizează minimul produsului $\Pi = n_1!\, n_2! \ldots n_\nu!$ sau, ceea ce este tot una, minimul expresiei

$$\ln \Pi = \sum_1^\nu{}_j \ln (n_j!),$$

ținînd seamă de condițiile (8) și (9).

In ipoteza pe care o presupunem verificată, că $n_1, n_2, \ldots, n$ sînt mari, formula lui Stirling

$$k! = k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}\left(1 + \frac{\theta}{|2k|}\right) \qquad 0<\theta<1,$$

prin urmare

$$\ln k! = \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln k - k + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \ln\left(1+\frac{\theta}{|2k|}\right),$$

ne dă

$$\ln \Pi = \sum_1^\nu{}_j \left(n_j+\frac{1}{2}\right)\ln n_j - \sum_1^\nu{}_j n_j + \frac{\nu}{2}\ln 2\pi + \sum_1^\nu{}_j \ln\left(1+\frac{\theta_j}{|2n_j|}\right),$$

unde vom trata pe n_j ca numere continue, mari, supuse condițiilor (5) și (6).

Al doilea și al treilea termen din această egalitate sînt constanți, iar ultimul are o valoare neglijabilă față de primul, care el însuși este comparabil cu

$$I = \sum_1^\nu{}_j n_j \ln n_j,$$

al cărui minim ne va da distribuția stabilă.

Vom avea deci condițiile

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^\nu{}_j \ln n_j\, dn_j = 0, \\ \sum_1^\nu{}_j dn_j = 0, \quad \sum_1^\nu{}_j e_j\, dn_j = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Scanned with OKEN Scanner

care arată că există două constante a și b pentru care

$$a+be_j+\ln n_j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

adică

$$n_j=Ce^{-be_j}, \tag{11}$$

unde n_j este numărul moleculelor care au energia cinetică e_j. Cum acest număr descrește dacă energia crește indefinit, b este pozitiv și vom avea:

$$n_j=Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u_j^2+v_j^2+w_j^2)}. \tag{12}$$

Urmînd calea obișnuită pentru a trece de la discontinuu la continuu, vom presupune diviziunile din ce în ce mai fine, iar, la limită, densitatea $f_j=\frac{n_j}{n}$ de repartiție a moleculelor cu viteza $(u,\ v,\ w)$ va fi

$$f(u,\ v,\ w)=Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u^2+v^2+w^2)}. \tag{13}$$

Cele două condiții care dau valorile constantelor C și λ sînt

$$\iiint\limits_{R^3} Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw=1$$

și

$$\frac{1}{2}n\iiint\limits_{R^3}(u^2+v^2+w^2)\,Ce^{-\frac{1}{2\lambda^2}(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw=E,$$

care reprezintă ecuația energiei.

Prima integrală se mai poate scrie

$$C\int\limits_R e^{-\frac{1}{2\lambda^2}u^2}\,du\int\limits_R e^{-\frac{1}{2\lambda^2}v^2}\,dv\int\limits_R e^{-\frac{1}{2\lambda^2}w^2}\,dw=1,$$

de unde relația

$$C\lambda^3\sqrt{8\pi^3}=1. \tag{14}$$

A doua integrală, după introducerea coordonatelor polare

$$u=r\sin\theta\cos\varphi,\quad v=r\sin\theta\sin\varphi,\quad w=r\cos\theta,$$

devine

$$\frac{1}{2}nC\int\limits_0^\infty r^4e^{-\frac{1}{2}\lambda^2r^2}\,dr\int\limits_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=E, \tag{15}$$

deci

$$3\sqrt{8\pi^3}nC\lambda^5 = E.$$

Relaţiile (14) şi (15) dau

$$\lambda^2 = \frac{E}{3n} = \frac{1}{3}e, \tag{16}$$

unde $e = \frac{E}{n}$ = energia medie a unei molecule şi $C = \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{8\pi^3 e^3}}$.

Cu aceste valori pentru λ şi C, repartiţia (13) este complet determinată. Potrivit principiului enunţat mai sus, aceasta este repartiţia stabilă a sistemului molecular considerat.

Revenind la legea de repartiţie (11), pe care o vom scrie $n_j = Le^{\frac{\varphi - \varepsilon_j}{\theta}}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, găsim că $\theta = 2\lambda^2 = \frac{2}{3}e$ şi în acelaşi timp rezultă *echipartiţia energiei* între diferitele molecule sau componente.

Reamintim că această repartiţie se obţine căutînd minimul expresiei I, pe care o mai putem scrie

$$I = n\sum_1^\nu{}_j f_j \ln f_j + n \ln n,$$

n fiind o constantă. Această expresie este minimă în acelaşi timp cu

$$J = \sum_1^n{}_j f_j \ln f_j,$$

a cărei formă limită este dată de funcţia H a lui Boltzmann.

Putem deci considera că repartiţia stabilă a moleculelor, după viteze, este cea care face mînimă pe $H(t)$ şi este în acelaşi timp repartiţie gaussiană.

§ 2. Legea de repartiţie a lui Planck

1. *Problema de repartiţie a lui Planck.* Cîmpul electromagnetic produs într-o încăpere aproape vidă V cu pereţi care reflectă vibraţiile electrice, izolată energetic de exterior, este echivalent cu un sistem de oscilatori mecanici localizaţi, avînd ecuaţii de forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} + 4\pi^2\nu^2 r = 0.$$

Energia oscilatorului este cuantică; ea are o valoare $nh\nu$, unde ν este frecvența, $h=6{,}62\cdot10^{-27}$ erg·s este constanta lui Planck, iar n este un întreg.

Energia totală este $E=\sum_j n_j h\nu$, unde n_j este numărul de cuante de energie a oscilatorului r_j și are o valoare fixă, dată.

Problema este de a găsi repartizarea numerelor n_j între oscilatorii cu diverse frecvențe, pentru regimul de stabilitate statistică a sistemului.

Pentru a răspunde la această problemă vom construi cîmpul de probabilitate respectiv.

Evenimentele elementare ale cîmpului de probabilitate sînt sistemele de complexe (r_i, n_i), $(i=1, 2, \ldots, N)$, unde N este numărul total al oscilatorilor. Două evenimente elementare diferă prin repartițiile diferite ale numerelor n_i de cuante de energie între diverși oscilatori.

Presupunem, ca o ipoteză de bază, că fiecare dintre aceste evenimente elementare au aceeași probabilitate p, egală cu inversul numărului total al evenimentelor elementare.

2. *Repartiția energiei între oscilatori. Principiul de probabilitate maximă.* Repartiția energiei între oscilatorii din V nu este arbitrară. Vom determina această repartiție pentru regimul de stabilitate.

Dacă numim cu g_k numărul oscilatorilor cu frecvența ν cuprinsă în intervalul I_k:

$$k\Delta \leqq \nu < (k+1)\Delta,$$

și cu n_k numărul total al cuantelor de energie care corespund intervalului de frecvență I_k, fie X_k numărul complexelor corespunzătoare intervalului I_k.

Facem $k=1, 2, \ldots, N$, pentru a epuiza practic intervalul frecvențelor posibile. Numărul total al complexelor din E care corespund repartițiilor a n_k cuante de energie între g_k oscilatori pentru $k=1, 2, \ldots, N$ este $\prod_{k=1}^{N} X_k$, iar probabilitatea mulțimii constituită din aceste elemente este

$$P=p\prod_{k=1}^{N} X_k. \qquad (1)$$

La repartiția stabilă din incintă se ajunge prin aplicarea unui principiu de maximum al probabilității P, principiu de origine termodinamică:

Repartiția stabilă este repartiția cea mai probabilă, sau repartiția căreia îi corespunde în E mulțimea cea mai numeroasă.

3. *Determinarea legii de repartiție.* X_k reprezintă numărul modurilor în care n_k cuante de energie se pot distribui între g_k oscilatori, știind că unui oscilator îi pot reveni mai multe cuante în același timp. X_k este dat, prin urmare, de formula combinărilor cu repetiție

$$X_k = \frac{(n_k+g_k-1)!}{n_k!(g_k-1)!}$$

sau, ținînd seamă că numerele g_k sînt mari,

$$X_k = \frac{(n_k+g_k)!}{n_k!\,g_k!}.$$

Folosind formula lui Stirling

$$X_k \cong \frac{n_k+g_k}{\sqrt{2\pi}\, n_k^{n_k+\frac{1}{2}}\, g_k^{g_k+\frac{1}{2}}},$$

din (1) rezultă:

$$\ln P = \ln \frac{P}{(\sqrt{2\pi})^2} + \sum_{k=1}^{N} (n_k+g_k)\ln(n_k+g_k) - n_k \ln n_k - g_k \ln g_k, \qquad (2)$$

dugă ce am neglijat, față de g_k și n_k, termenul $\frac{1}{2}$ de la exponent. Maximul probabilității va fi realizat o dată cu maximul membrului al doilea din (2), considerînd diversele valori posibile pentru n_k, condiționate de relația

$$\sum_{k=1}^{N} n_k h\nu = E,$$

E fiind energia totală fixă a sistemului de oscilatori.

Trebuie pentru aceasta ca

$$\sum_{k=1}^{N} (\ln(n_k+g_k) - \ln n_k)\,\delta n_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} h\nu \delta n_k = 0.$$

Există deci o valoare μ pentru care

$$\ln \frac{n_k+g_k}{n_k}=\mu h\nu$$

sau, cu notații mai adecvate, punînd n_ν în loc de n_k,

$$n_\nu=g_\nu \frac{1}{e^{\mu h\nu}-1}. \tag{3}$$

Ținînd seamă că energia corespunzătoare frecvențelor din intervalul I_k este, cu noile notații,

$$E_\nu=h\nu n_\nu$$

și că, după o formulă cunoscută,

$$g_\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \tag{4}$$

din (3) și (4) rezultă formula lui Planck de repartiție a energiei după frecvență:

$$E_\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1},$$

unde am pus $\mu=\frac{1}{kT}$, T fiind temperatura absolută, iar k constanta lui Boltzmann. Procedee analoge se pot folosi pentru a prezenta repartițiile lui Einstein și Fermi.

§ 3. Fundarea probabilistă a Mecanicii statistice

1. *Invarianții mișcării unui sistem dinamic.* Construirea probabilităților pentru un sistem dinamic oarecare se realizează cu ajutorul invarianților mișcării lui. Acești invarianți sînt, precum vom vedea în cele ce urmează, anumite varietăți din spațiul fazelor precum și măsura definită pe ele.

Fie $\sum$ un sistem dinamic conservativ cu m grade de libertate; $q^1, q^2, \ldots, q^m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ coordonatele generale de poziție și momentele sale determinate pentru fiecare valoare a lui t și P punctul avînd aceste numere drept coordonate carteziene în spațiul S — euclidian cu $2m$ dimensiuni — al fazelor, pe care-l asociem sistemului $\sum$.

Dacă funcția de stare (hamiltonianul) $H(P)=H(q^1, q^2, \ldots, q^m; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ îndeplinește anumite condiții de regularitate în

tot spaţiul S, funcţia vectorială $P(t)$ care descrie mişcarea punctului reprezentativ P al lui $\sum$ în S este soluţia

$$P(t) = F(P_{t_0};\ t - t_0), \tag{1}$$

determinată şi unică, a sistemului

$$\frac{dP}{dt} = \Phi(P); \qquad (P(t))_{t=t_0} = P_{t_0}, \tag{2}$$

unde $\frac{dP}{dt} = \Phi(P)$ reprezintă sistemul canonic

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

iar P_{t_0} este un punct dat, arbitrar, în S.

Proprietăţile individuale ale mişcării (1) rezultă imediat considerînd pe (1) ca o transformare depinzînd de un parametru.

Punînd pentru uniformitate $P(t) = P_t$, relaţiile (1) şi (2) ne dau egalităţile

$$P_{t_1} = F(P_{t_0}; t_1 - t_0);\ P_{t_2} = F(P_{t_1}; t_2 - t_1) = F(P_{t_0}; t_2 - t_0),$$

care arată cum se compun mişcările succesive; de asemenea

$$P_{t_0} = F(P_t; t_0 - t),$$

care reprezintă reversibilitatea mişcării, şi, în sfîrşit,

$$P_{t_0} = F(P_{t_0}; 0),$$

care identifică condiţia iniţială. Faptul că mişcările formează un grup de-a lungul unei traiectorii determinate rezultă de altfel imediat din definiţia acestei mişcări. Ceea ce trebuie în special reţinut este faptul că grupul operează în acelaşi timp asupra întregului spaţiu S, a cărui mişcare, pe care o vom numi *curgere*, interesează cu deosebire Mecanica statistică. Alegînd momentul iniţial, de altfel arbitrar $t_0 = 0$, vom reprezenta *curgerea* prin grupul continuu de transformări

$$P_t = F(P_0; t), \tag{4}$$

ale spaţiului S în el însuşi.

2. *Invarianţii geometrici ai curgerii. Sisteme ergodice.* Două tipuri de varietăţi invariante se prezintă imediat.

a) Traiectoria unui punct oarecare din F rămîne identică cu ea însăşi în tot procesul curgerii; ea este deci o varietate de dimensiune 1 invariantă.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că două traiectorii care au un punct comun sînt identice. Putem deci spune că spaţiul S se descompune într-o mulţime de traiectorii invariante, disjuncte, reprezentînd liniile de curgere ale fluidului respectiv.

Determinarea structurii acestei mulţimi a traiectoriilor este o problemă deosebit de importantă pentru stabilirea proprietăţilor curgerii spaţiului S.

b) Varietăţile de energie constantă $H(q^1, q^2, \ldots, q^m; p_1, p_2, \ldots, p_m) = E$.

Ecuaţiile (3) ne arată că H, presupusă că nu depinde explicit de timp, este constantă în timpul mişcării:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_1^m{}_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0.$$

Valoarea constantă a lui H reprezintă energia sistemului. Toate punctele P din spaţiul S, pentru care

$$H(P) = E,$$

corespund sistemelor cu aceeaşi energie.

Deoarece un sistem îşi păstrează energia în timpul mişcării, traiectoria punctului P respectiv rămîne pe aceeaşi varietate $H(P) = H(P_0)$ de energie constantă. Această varietate are $2m-1$ dimensiuni.

Vom presupune în cele ce urmează că *nu există şi alte integrale prime uniforme în afară de integrala energiei*. Prin urmare, nu avem varietăţi uniforme invariante de dimensiunea $2m-1$ în afară de acele de energie constantă.

Sistemele avînd această proprietate sînt *ergodice*.

3. *Componentele unui sistem dinamic.* Ştim că, în lipsă de interacţiune între două sisteme dinamice $\sum_1$ şi $\sum_2$ avînd ca hamiltonieni $H_1(P_1)$ şi $H_2(P_2)$, sistemul constituit din ele are hamiltonianul $H_1(P_1) + H_2(P_2)$. Spaţiul fazelor S este produsul cartezian al spaţiilor S_1 şi S_2. Vom scrie

$$\sum = \sum_1 + \sum_2$$

şi vom numi sistemele $\sum_1$ şi $\sum_2$, presupuse ca fiind fără interacţiune între ele, *componente* ale sistemului $\sum$.

Desigur şi în acest caz avem varietatea invariantă $H = H_1 + H_2 = E$ de $2m-1$ dimensiuni. Însă, în acelaşi timp, avem în timpul mişcării $H_1 = E_1$ şi $H_2 = E_2$ (cu $E_1 + E_2 = E$), ca varie-

tăți invariante de dimensiunile $2m_1-1$, respectiv, $2m_2-1$. Traiectoriile punctelor respective P_1 și P_2 sînt situate pe aceste varietăți. Dar traiectoria punctului $P(P_1, P_2)$ se află pe varietatea $H=E$.

Mai general, este suficient ca $H=H_1+H_2+\ldots+H_n$, energiile H_i avînd variabile separate, pentru ca să numim sistemele corespunzătoare *componente* ale sistemului $\sum$. In general, componentele sînt în interacțiune și, în timpul mișcării, energiile separate H_i pot varia fără ca H să varieze.

Exemple de componente ale unui sistem. Un gaz constituit din molecule identice, perfect elastice, ținut la temperatură exterioară constantă, închis într-un recipient cu pereții interiori lucii și perfect elastici, este un sistem cu atîtea componente cîte molecule există. Dacă mai presupunem că forțele exterioare care acționează asupra moleculelor sînt neglijabile, atunci

$$H=\sum_1^N{}_i H_i, \qquad H_i=\frac{1}{2}m(u_i^2+v_i^2+w_i^2).$$

Un alt exemplu este o moleculă liberă sau sub influența unei forțe elastice. In acest din urmă caz

$$H=\frac{1}{2}m(\dot{x}_i^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)+k^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=H_1+H_2+H_3,$$

unde

$$H_i=\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2+k^2x_i^2, \qquad i=1,2,3.$$

In primul caz, componentele erau sisteme fizice autonome. In al doilea caz, ele pot fi doar interpretate ca atare.

Problema care rămîne de examinat este următoarea: Se poate descompune o varietate $H=E$ în două sau mai multe părți disjuncte cu aceeași dimensiune $2m-1$, invariante pentru grupul de transfomări (4) în sensul că traiectoria corespunzătoare unui punct dintr-una din aceste părți rămîne în întregime în această parte?

Această problemă va fi examinată mai departe.

4. *Măsură invariantă în spațiul fazelor.*

Teorema I. Fie A o mulțime măsurabilă Lebesgue în spațiul S al fazelor sistemului $\sum$ și $m(A)$ măsura ei; dacă A_t este transformata acestei mulțimi prin (4), atunci

$$m(A_t)=m(A).$$

Este suficient, pentru a demonstra această teoremă a lui Liouville, să arătăm că volumele se conservă, deci este suficient să demonstrăm că determinantul funcțional al transformării (4) este $+1$.

Pentru a simplifica demonstrația, vom schimba notațiile. Fie

$$\frac{dx^i}{dt} = A^i(x^1, x^2, \ldots, x^{2m}) \qquad i = 1, 2, \ldots, 2m \tag{5}$$

sistemul canonic și

$$x^i = F^i(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{2m}; t) \tag{6}$$

soluția sa. Sistemul (6) este o altă formă a transformării (4) pentru fiecare t. Fie

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^1} \cdots \frac{\partial x^{2m}}{\partial x_0^1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial x_0^{2m}} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^{2m}} \cdots \frac{\partial x^{2m}}{\partial x_0^{2m}} \end{vmatrix}$$

determinantul funcțional al transformării la un moment dat t. Vom avea:

$$\frac{dD}{dt} = \sum_1^{2m} {}_i D_i.$$

unde D_i este determinantul care se obține din D dacă derivăm în raport cu t elementele coloanei i. Ținînd seamă că se poate inversa ordinul de derivare și avînd în vedere și ecuațiile diferențiale date (5), avem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0^k}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial A^i}{\partial x_0^k} = \sum_1^{2m} {}_l \frac{\partial A^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x_0^k};$$

deci,

$$D_i = \sum_1^{2m} {}_l \frac{\partial A^i}{\partial x^l} D_{il},$$

unde D_{il} se obține din D înlocuind coloana i cu coloana l, ceea ce dă $D_{il}=0$ pentru $l \neq i$ și $D_{ii}=D$. Prin urmare,

$$D_i = D\frac{\partial A^i}{\partial x^i},$$

de unde

$$\frac{dD}{dt} = D\sum_{1}^{2m}{}_{i}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}.$$

Pentru sistemul (3) se verifică imediat că

$$\sum_{1}^{2m}{}_{i}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=0,$$

ceea ce dă rezultatul $D=\text{const}$. Cum pentru $t=0$ transformarea (4) este identică, rezultă $D=1$.

Teorema lui Liouville este demonstrată.

A doua teoremă generală asupra *extensiunii în fază*, numele obişnuit în Mecanica statistică pentru $m(A)$, este următoarea:

Teorema II. $m(A)$ *este invariantă pentru orice transformare canonică.*

Teorema lui Liouville este numai un caz particular al acestei teoreme, deoarece transformarea (4) este canonică.

O transformare

$$P(q^1, q^2, \ldots, q^m;\ p_1, p_2, \ldots, p_m) \to Q(r^1, r^2, \ldots, r^m;\ s_1, s_2, \ldots, s_m)$$

a spaţiului fazelor în el însuşi este canonică dacă conservă ecuaţiile canonice, sau, ceea ce este echivalent, dacă $K(Q)$ fiind o funcţie de punctul Q convenabil aleasă, expresia

$$\sum_{1}^{m}{}_{i} p_i \delta q^i - H\delta t - \left(\sum_{1}^{m}{}_{i} s_i dr^i - K\delta t\right) = \delta V(q^1, \ldots, q^m;\ r^1, \ldots, r^m, t) \qquad (7)$$

este o diferenţială totală exactă.

Rezultă

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial r^i} = s_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \qquad (8)$$

$$K - H = \frac{\partial V}{\partial t}. \qquad (9)$$

Vom scrie, prescurtat, în calculul ce urmează,

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = A_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial r^i} = B_i.$$

Din (8) rezultă

$$\frac{\partial A_i}{\partial q^l}+\sum_1^m{}_h \frac{\partial A_i}{\partial r^h}\frac{\partial r^h}{\partial q^l}=0;\quad \sum_1^m{}_h \frac{\partial A_i}{\partial r^h}\frac{\partial r^h}{\partial p_l}=\delta_{il},$$

$$\delta_{il}=\begin{cases}0 & i\neq l,\\ 1 & i=l,\end{cases}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^l}+\sum_1^m{}_h \frac{\partial B_i}{\partial r^h}\frac{\partial r^h}{\partial q^l}=-\frac{\partial s_i}{\partial q^l};\qquad \sum_1^m{}_h \frac{\partial B_i}{\partial r^h}\frac{\partial r^h}{\partial p_l}=-\frac{\partial s_i}{\partial p_l}.$$

$$i,l=1,2,\ldots,m.$$

Dacă înlocuim în determinantul funcțional al transformării

$$\Delta=\frac{D(r^1,\ldots,r^m;\,s_1,\ldots,s_m)}{D(q^1,\ldots,q^m;\,p_1,\ldots,p_m)}$$

derivatele $\frac{\partial s_i}{\partial q^l}$ și $\frac{\partial s_i}{\partial p_l}$ $(i,\ l=1,2,\ldots,m)$ prin expresiile lor de mai sus, acest determinant se reduce imediat la produsul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial p_1} & \frac{\partial r^2}{\partial p_1} & \frac{\partial r^m}{\partial p_1}\\ \frac{\partial r^1}{\partial p_2} & \frac{\partial r^2}{\partial p_2} & \frac{\partial r^m}{\partial p_2}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial r^1}{\partial p_m} & \frac{\partial r^2}{\partial p_m} & \frac{\partial r^m}{\partial p_m}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial q^1} & \frac{\partial B_m}{\partial q^1}\\ \vdots & \vdots\\ \frac{\partial B_1}{\partial q^m} & \frac{\partial B_m}{\partial q^m}\end{vmatrix}=1,$$

ținînd seamă de relațiile precedente — grupul al doilea din prima linie — și de faptul că

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^k}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^i\partial q^k}=\frac{\partial A_k}{\partial r^i}.$$

Teorema II este astfel demonstrată.

5. *Analogia hidrodinamică. Ecuația lui Jacobi.* Ecuațiile (8) și (9) se pot interpreta în mod convenabil pentru a preciza analogia cu un fluid a deplasării spațiului fazelor în el însuși.

Să considerăm un sistem de $2m$ parametri $r^i=\alpha_i$; $s_i=\beta_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ și să alegem funcția de stare $K\equiv 0$.

Dacă ţinem seamă de (8), ecuaţia (9) se poate scrie

$$H\left(q^1, q^2, \ldots, q^m, \frac{\partial V}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q^m}\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \qquad (10)$$

V fiind o funcţie de m parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ care verifică această ecuaţie (o integrală completă) $V = V(q^1, q^2, \ldots, q^m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, t)$. Soluţia sistemului se obţine scriind

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

sistem care dă cele $2m$ variabile (q^i, p_i) $i = 1, 2, \ldots, m$ în funcţie de t şi de parametrii α_i, β_i.

Pe de altă parte, dacă considerăm în spaţiul $H = E$ un fluid incompresibil şi irotaţional, cu presiunea interioară nulă, viteza derivă dintr-un potenţial V şi ecuaţia de mişcare este de forma (10).

6. *Cîmpul de probabilitate pe S. Sisteme canonice. Distribuţie canonică.* Vom presupune că sistemul $\sum$ este canonic. Aceasta înseamnă, prin definiţie, că integrala

$$\psi(\alpha) = \int_S e^{-\alpha H}\, dS \qquad (11)$$

există pentru orice $\alpha > 0$[1]).

Observăm, în acelaşi timp, că pentru orice mulţime măsurabilă A din S, integrala

$$I_\Delta = \int_\Delta e^{-\alpha H}\, dS$$

este un invariant pentru ecuaţiile (4), deoarece, pe baza acestor ecuaţii,

$$\int_\Delta e^{-\alpha H}\, dS = \int_{\Delta_0} e^{-\alpha H_0}\, dS_0.$$

Putem considera deci ca probabilitate a mulţimii A valoarea

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_A e^{-\alpha H}\, dS, \ldots \qquad (12)$$

care îndeplineşte condiţiile generale ale unei probabilităţi.

---

[1]) Admitem că energia sistemului, ale cărei valori sînt date de H, are numai valori pozitive. Dacă presupunem că energia unui sistem are un minim finit, ne putem aranja, alegînd constanta arbitrară de care dispunem pentru energia potenţială, ca acest minim să fie zero.

Scanned with OKEN Scanner

Faptul că am determinat pe S un cîmp de probabilitate numai cînd sistemul este canonic nu reprezintă o adevărată restricţie decît din punct de vedere matematic, deoarece obiectele cele mai interesante ale mecanicii statistice sînt chiar aceste sisteme, pe care W. Gibbs le-a denumit canonice.

7. *Valori medii. Valoarea medie a energiei.* Fie $f(P)$ o funcţie măsurabilă de fază. Ea defineşte pentru cîmpul de probabilitate o variabilă aleatorie. Dacă integrala

$$\bar{f} = \int_S \frac{1}{\psi(\alpha)} e^{-\alpha H(P)} f(P)\, dP \tag{13}$$

există, ea defineşte valoarea medie a variabilei $f(P)$. In particular, dacă $f(P)$ este funcţia caracteristică a unei mulţimi măsurabile A, integrala de mai sus este identică cu $P(A)$ dat de (12).

Pentru energia $H(P)$, considerată ca variabilă aleatorie, integrala (13) devine[1]):

$$\bar{H} = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S e^{-\alpha H(P)} H(P)\, dP, \tag{14}$$

iar (11), prin derivare în raport cu α, ne dă

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} = -\int_S e^{-\alpha H(P)} H(P)\, dP,$$

de unde

$$\bar{H} = -\frac{d \ln \psi(\alpha)}{d\alpha}. \tag{15}$$

Dispersia energiei. Vom pune

$$\Delta^2 = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S e^{-\alpha H(P)} [H(P) - \bar{H}]^2 dP,$$

de unde

$$\Delta^2 = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S e^{-\alpha H(P)} H^2(P)\, dP - \bar{H}^2 \tag{16}$$

sau, deoarece

$$\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \int_S e^{-\alpha H(P)} H^2(P)\, dP,$$

rezultă

$$\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \Delta^2 + \bar{H}^2.$$

---

[1]) Se verifică imediat că momentele de orice ordin ale energiei există.

Această egalitate arată că $\frac{d^2\psi(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$, deci $\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}$ este crescătoare cu α.

De aici rezultă că *ecuația*

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\psi(\alpha)} + a = 0 \tag{17}$$

are o singură rădăcină reală. In adevăr, funcția

$$h(\alpha) = e^{a\alpha}\psi(\alpha),$$

pozitivă pentru $\alpha > 0$, tinde evident către infinit cînd α tinde către infinit; $\ln h(\alpha)$ tinde de asemenea către infinit cînd α tinde către infinit și

$$\frac{d^2 \ln h(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{d^2 \ln \psi(\alpha)}{d\alpha^2}.$$

Insă

$$\frac{d^2 \ln \psi(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{\psi(\alpha)\psi''(\alpha) - [\psi'(\alpha)]^2}{\psi^2(\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_S \left[H + \frac{\psi'(\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]^2 e^{-aH(P)}\, dP. \tag{18}$$

Deci, $\frac{d^2 \ln h(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$, ceea ce arată că $h(\alpha)$ este convexă. Ea are un minim și unul singur. In acest punct derivata ei este nulă, deci ecuația (17) are o rădăcină reală determinată și unică.

Ținînd seamă de (16) și (18), rezultă pentru dispersie expresia simplă

$$\Delta^2 = \frac{d^2 \ln \psi(\alpha)}{d\alpha^2}. \tag{19}$$

Compunerea funcțiilor $\psi(\alpha)$. Dacă $\sum_1$ și $\sum_2$ sînt componentele sistemului $\sum (\sum = \sum_1 + \sum_2)$, aceasta înseamnă că

$$H = H_1 + H_2.$$

Dacă

$$\psi_1(\alpha) = \int_{S_1} e^{-H_1(P_1)}\, dP_1; \quad \psi_2(\alpha) = \int_{S_2} e^{-H_2(P_2)}\, dP_2,$$

deoarece $H_1(P) = H_1(P_1)$, $H_2(P) \equiv H_2(P_2)$ cu $P_1 \in S_1$, $P_2 \in S_2$, vom avea:

$$\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) = \int_{S_1 \times S_2} e^{-a(H_1(P) + H_2(P))}\, dP_1 dP_2 = \int_S e^{-aH(P)}\, dP,$$

prin urmare

$$\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)=\psi(\alpha), \tag{20}$$

egalitate care reprezintă legea de compunere a funcţiilor $\psi(\alpha)$.

8. *Măsura invariantă pe varietatea $H=E$.* Să considerăm o schimbare de coordonate în S, care introduce energia E ca una dintre coordonate:

$$\left.\begin{aligned} &x^l\equiv E=H(q^1,\ q^2,\ldots,p_m),\\ &x^i=f^i(q^1,\ q^2,\ldots,p_m).\\ &(i=1,2,\ldots,\ 2m;\ i\neq l). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Să observăm mai întîi că dacă noile coordonate sînt astfel că

$$x^1=q^1,\quad x^2=q^2,\ldots,x^m=q^m;\quad x^{m+1}=E,$$

$$x^{m+2}=p_2,\ldots,x^{2m}=p_m, \tag{22}$$

determinantul funcţional al transformării

$$D=\frac{D(x^1,\ x^2,\ldots,x^{2m})}{D(q^1,\ q^2,\ldots,p_m)} \tag{23}$$

are valoarea

$$D=\frac{\partial H}{\partial p_1}. \tag{24}$$

Să considerăm acum o transformare

$$y^l=g^l(q^1,\ldots,p_m)\qquad i=1,\ 2,\ldots,2m,$$

determinată astfel ca $y^1, y^2,\ldots,y^{2m-1}$ să constituie un sistem de coordonate pe varietatea $H=E$, ortogonal într-un punct M de pe această varietate şi în S. In acest caz, vom avea:

$$D_M=\left(\frac{D(y^1,\ldots,y^{2m})}{D(q^1,\ldots,p_m)}\right)_M=1. \tag{25}$$

Curba $y^l=y^l_M$ $(l=2,\ 3,\ldots,2m)$ este normală la varietatea $H=E$ în M. Efectuînd acum transformarea

$$\begin{aligned} &x^1=K(y^1,\ y^2,\ldots,y^{2m})=H(q^1,\ q^2,\ldots,p_m),\\ &x^l=y^l\quad (l=2,\ldots,2m), \end{aligned} \tag{26}$$

rezultă imediat că

$$\frac{D(x^1,\ x^2,\ldots,x^{2m})}{D(y^1,\ y^2,\ldots,y^{2m})}=\frac{\partial K}{\partial y^1}=\text{grad } H, \tag{27}$$

unde

$$|\operatorname{grad} H| = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial H}{\partial p_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prin urmare, compunînd (25) cu (27), obţinem:

$$\left(\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})}{D(q^1, q^2, \ldots, p_m)}\right)_M = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^{2m})}{D(y^1, y^2, \ldots, y^{2m})} \left(\frac{D(y^1, y^2, \ldots, y^{2m})}{D(q^1, q^2, \ldots, p_m)}\right)_M =$$

$$= |\operatorname{grad} H|.$$

Această relaţie locală are caracter invariant. Ţinînd seamă că $d\sigma = dx^2 dx^3 \ldots dx^{2m}$ reprezintă elementul de volum de pe varietatea $H=E$, vom avea, notînd cu dP elementul de volum din spaţiul fazelor,

$$\int_\Delta dP = \int_\Delta dE \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} \tag{28}$$

pentru orice domeniu Δ. Cum dE este invariant rezultă că pentru orice mulţime măsurabilă A din varietatea $H=E$,

$$m(A) = \int_A \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} \tag{29}$$

este un invariant pentru curgerea (4). Avem astfel realizată o *măsură invariantă* pe suprafeţele $H=E$. Cu ajutorul acestei măsuri se poate construi un cîmp de probabilitate pe fiecare dintre aceste suprafeţe.

9. *Distribuenta şi funcţia de structură a lui Hincin.* Vom presupune că varietăţile $H=E$ sînt compacte[1]). Se poate deduce uşor că aceste varietăţi sînt simple, fără puncte multiple, din faptul că două varietăţi $H=E$, $H=E'$, oricît de vecine, nu au puncte în comun.

Numim *distribuentă* funcţia pozitivă şi crescătoare cu E

$$\Phi(E) = \int_{0 \leq H \leq E} dP. \tag{30}$$

---

[1]) Cazul compactităţii varietăţii $H=E$ este curent în mecanica statistică, dar nu este aşa de general încît să lăsăm de o parte şi cazul în care varietăţile nu sînt compacte, caz pe care însă nu-l considerăm aici.

Avem evident, ca în (28),

$$\Phi(E)=\int\limits_{0\leq H\leq E} dE\,\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}=\int\limits_0^E de\int\limits_{H=e}\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|},$$

de unde, dacă introducem cu Hincin, *funcția de structură*

$$\Omega(e)=\int\limits_{H=e}\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}=m(H=e), \tag{31}$$

care este o densitate a distribuției energiei, avem:

$$\Phi(E)=\int\limits_0^E\Omega(e)\,de. \tag{32}$$

10. *Cîmpul de probabilitate pe $H=E$. Distribuția microcanonică.* Măsura invariantă $\mu(A)$ și funcția $\Omega(e)$ îngăduie să definim probabilitatea pentru mulțimile măsurabile μ pe varietatea $H=E$:

$$\mu(A)=\frac{1}{\Omega(E)}\int\limits_A\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}. \tag{33}$$

Această lege de calcul al probabilității se numește, după W. Gibbs, *microcanonică*.

Valoarea medie a unei variabile aleatorii $f(Q)\,[H(Q)=E]$ este exprimată de integrala, presupusă existentă,

$$M(f)=\frac{1}{\Omega(E)}\int\limits_{H=E}f(Q)\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}=\frac{1}{\Omega(E)}\frac{d}{dE}\int\limits_{H<E}f(P)\,dP. \tag{34}$$

11. *Echipartiția energiei.* Considerînd variabila aleatorie pe varietatea $H=E$ de energie dată, produsul p_iq_i sau, potrivit ecuațiilor (3), $p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}$, valoarea sa medie, aplicînd relația (22) și teorema lui Stokes, este

$$M(p_i\dot{q}^i)=\frac{1}{\Omega(E)}\int\limits_{H=E}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}=\frac{1}{\Omega(E)}\int\limits_{H<E}dv.$$

Deci, folosind (11) și (19),

$$M(p_i\dot{q}^i)=\Phi(E)\,/\,\frac{d\Phi(E)}{dE}. \tag{35}$$

Produsul $p_i\dot{q}^i$ este dublul energiei cinetice corespunzătoare coordonatei q^i, *iar valoarea medie a energiei acestei componente este aceeași oricare ar fi coordonata* q^i.

Notînd

$$\theta = M(p_i\dot{q}_i),$$

vom avea:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{d \ln \Phi(E)}{dE}. \tag{36}$$

Formulele (23) sau (24) exprimă teorema clasică a *echipartiției energiei* E între diferitele componente reprezentate de cele m grade de libertate.

12. *Repartiția energiei în spațiul fazelor.* Reluînd probabilitatea definită pe S prin formula (12) și (28), găsim:

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_A e^{-\alpha H(P)} dP = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_A e^{-\alpha E} dE \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}.$$

Dacă mulțimea A este constituită din punctele cuprinse între suprafețele $H = E_1$ și $H = E_2$ $(E_1 < E_2)$,

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{E_1}^{E_2} e^{-\alpha E} dE \int_{H=E} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|},$$

adică

$$M(A) = \frac{1}{\psi(\alpha)} \int_{E_1}^{E_2} e^{-\alpha E} \Omega(E)\, dE. \tag{37}$$

Prin urmare, densitatea de repartiție a energiei [sau, în termeni proprii, a variabilei aleatorii $H(P)$] este

$$\rho(E) = \frac{1}{\psi(\alpha)} e^{-\alpha E} \Omega(E), \tag{38}$$

avînd bineînțeles

$$\int_0^\infty \rho(E)\, dE = 1$$

și convenind ca, pentru $x < 0$, să luăm $\rho(x) = 0$ distribuția se poate considera definită pe întreaga axă reală.

13. *Compunerea funcțiilor de structură și a densităților de repartiție* $\rho(E)$. După relația (15) și folosind relația (32), avem:

$$\Phi(E)=\int\limits_{H<E} dP=\int\limits_{H_1<E} dP_1 \int\limits_{H_2<E-H_1} dP_2=\int\limits_0^E \Omega_2(E-H_1)\,dP_1$$

sau

$$\Phi(E)=\int\limits_0^E \Omega_2(E-H_1)\,\Omega_1(E_1)\,dE_1.$$

Dacă folosim încă o dată (32), derivînd în raport cu E, găsim:

$$\Omega(E)=\int\limits_0^E \Omega_1(E_1)\,\Omega_2(E-E_1)\,dE_1. \tag{39}$$

Această relație se poate încă scrie

$$\Omega(E)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega_1(E_1)\,\Omega_2(E-E_1)\,dE_1, \tag{39'}$$

ținînd seama că

$$\Omega(a)=0$$

pentru

$$a<0.$$

Ținînd seama de relația (38), avem:

$$\int\limits_0^{\infty} \rho_1(E_1)\,\rho_2(E-E_1)\,dE_1=\frac{e^{-\alpha E}}{\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)}\int \Omega_1(E_1)\,\Omega_2(E-E_1)\,dE_1.$$

Relațiile (39) și (20) ne dau legea de compunere

$$\rho(E)=\int\limits_0^{\infty} \rho_1(E_1)\,\rho_2(E-E_1)\,dE_1$$

sau, convenind că $\rho(a)=0$ dacă $a<0$, în concordanță cu (38) și cu extinderea analogă pentru $\Omega(E)$,

$$\rho(E)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_1(E_1)\,\rho_2(E-E_1)\,dE_1. \tag{40}$$

Legea (40) *de compunere a densităților de repartiție canonică a energiei este valabilă fără ca variabilele* H_1 *și* H_2 $(H_1+H_2=H)$ *să fie independente.* Din aceasta se obține imediat relația

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) \tag{40'}$$

între funcțiile caracteristice ale variabilelor H_1, H_2 și $H=H_1+H_2$.

Scanned with OKEN Scanner

14. *Observație relativă la generalitatea sistemelor canonice.* Expresia

$$\psi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha E}\,\Omega(E)\,dE \tag{41}$$

este deosebit de comodă pentru a lămuri pînă la ce grad sistemele canonice nu sînt prea particulare. Aceasta rezultă din comportarea funcției

$$\Omega(E)=\int_{H=E}\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}$$

pentru valorile lui E cînd $E\to\infty$.

Nu examinăm aici problema în generalitatea ei. Dăm numai un exemplu care interesează teoria cinetică și care ilustrează observația noastră.

Dacă

$$H=\frac{1}{2}\sum_1^m{}_i p_i^2,$$

avem $|\operatorname{grad} H|=\sqrt{\sum_1^m{}_i p_i^2}$, deci $\Omega(E)=\frac{k}{\sqrt{E}}$; deci, $\psi(\alpha)=k\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha E}}{\sqrt{E}}\,dE$ există. Un gaz ideal este deci un sistem canonic.

15. *Indecompozabilitate metrică a varietății $H=E$.* Fie E o valoare a energiei și domeniile $H<E$, $H\geq E$. Fiecare dintre aceste domenii este un invariant pentru curgere. Măsura (12) invariantă a primului domeniu este

$$M(H<E)=\frac{1}{\psi(\alpha)}\int_{H<E}e^{-\alpha H(P)}\,dP>0,$$

iar cea relativă la cel de al doilea domeniu este

$$M(H\geq E)=\frac{1}{\psi(\alpha)}\int_{H\geq E}e^{-\alpha H(P)}\,dP,$$

de asemenea strict pozitivă. Suma lor este 1. Spațiul fazelor este, deci, decompozabil în două (și, deci, în oricîte) domenii invariante de măsură diferită de zero.

Nu este același lucru, în general, pentru varietatea invariantă $H=E$.

Vom spune că această varietate este *metric invariantă*, sau mai precis *P — invariantă, dacă V_1, V_2 reprezentînd părți inva-*

riante și complementare ale varietății $H=E$, una dintre egalitățile $M(V_1)=0$, $M(V_2)=0$ este verificată.

Condiția $M(V_i)=0$ ($i=1$ sau 2) nu implică pe aceea că V_i este măsurabilă, ci numai următorul fapt: orice mulțime măsurabilă cuprinsă în V_i este de măsură nulă.

16. *Stabilitatea valorii medii. Teorema ergodică.* O mărime observabilă sau măsurabilă asociată unui sistem dinamic este, în genere, valoarea medie a unei variabile aleatorii în S sau pe $H=E$.

Teorema ergodică pune în deosebit relief caracterul de stabilitate al valorii medii precum și legătura strînsă dintre această valoare medie și aceea care rezultă din diferite probe experimentale eșalonate în timp.

Dacă $f(P)$ este o variabilă aleatorie în spațiul S sau pe $H=\sum$, integrabilă, atunci

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(P_s)\,ds=\hat{f}(P_0)=\hat{f}(P_u), \tag{42}$$

cu $P_u=F(P_0,u)$, oricare ar fi u pozitiv sau negativ, aproape pentru orice P_0.

Inainte de a trece la demonstrarea acestei teoreme fundamentale în condițiile care ne interesează aici, vom face observația că energia, ca variabilă aleatorie, joacă un rol foarte special în legătură cu teorema lui Birkhof.

Energia fiind constantă în timp, dacă punem $f(P_s)=H(P_s)$ teorema (42) este banală. La fel, dacă $f(P_s)=K(H(P_s))$. O funcție oarecare $f(P)$, cînd $P\in S$, se poate prezenta sub forma următoare

$$f(P)\equiv g(Q,E),$$

unde Q este un punct pe varietatea $H=E$. Deci,

$$f(P_s)\,g(Q_s,E_s)=g(Q_s,E).$$

Prin urmare, teorema ergodică pentru sistemele dinamice prezintă interes numai în ce privește variabilele aleatorii definite pe varietățile $H=E$.

Teorema ergodică redusă. Fie V o parte invariantă, de măsură $m(A)$ diferită de zero, a varietății compacte $H=E$, și $f(P)$ o variabilă aleatorie mărginită, definită pe V și integrabilă.

Vom avea:

1° convergența exprimată de relația (42);

2° egalitatea

$$\hat{f}(P_0)=\int_V f(P)\,m\,(dP)=\frac{1}{\Omega(E)}\int_V f(P)\,\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}, \tag{43}$$

cu excepția eventuală a unei mulțimi de puncte P_0 de măsură nulă.

Demonstrație. Punem, în vederea stabilirii acestei teoreme,

$$\varphi(P_0,t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(P_s)\,ds. \tag{44}$$

Incepem cu două propoziții auxiliare.

Mai întîi propoziția:

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi(P_0,t)-\varphi(P_0,n)]\to 0, \tag{45}$$

dacă n este cel mai mare întreg cuprins în t.

In adevăr, din (44) rezultă că

$$\varphi(P_0,t)-\varphi(P_0,n)=\frac{1}{n}\int_n^t f(P_s)\,ds-\frac{t-n}{n}\frac{1}{t}\int_0^t f(P_s)\,ds.$$

Ținînd seamă că $0\leq t-n<1$ și că, potrivit ipotezelor, există un K astfel că

$$|f(P)|<K,$$

$$|\varphi(P_0,t)-\varphi(P_0,n)|\leq\frac{2}{n}K,$$

de unde propoziția (45) rezultă imediat.

A doua propoziție auxiliară este

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi(P_0,t)-\varphi(P_u,t)]=0 \tag{46}$$

pentru orice $u\in R$.

Din (44) și (1) rezultă

$$\varphi(P_u,t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(F(P_u,s))\,ds=\frac{1}{t}\int_0^t f(P_{u+s})\,ds.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $u+s=s'$, avem:

$$\varphi(P_u, t)=\frac{1}{t}\int_u^{u+t} f(P_s)\,ds.$$

Prin urmare,

$$\varphi(P_u, t)-\varphi(P_0, t)=\frac{1}{t}\int_u^{u+t} f(P_s)\,ds-\frac{1}{t}\int_0^{u} f(P_s)\,ds,$$

de unde, procedînd ca mai sus, rezultă (46).

Este deci suficient să demonstrăm că $\varphi(P_0, n)$ are o limită cînd n tinde către infinit.

Fie $l(P_0)$ una dintre limitele şirului $\varphi(P_0, n)$, presupunînd că există mai multe limite cînd $n\to\infty$, şi fie $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ un şir pentru care avem

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(P_0, n_m)=l(P_0). \tag{47}$$

Propoziţia (46) ne arată că vom avea, în acelaşi timp,

$$\lim\varphi(P_u, n_m)=l(P_u)=l(P_0).$$

Prin urmare, $l(P_0)$ este invariantă pentru curentul (4).

Mulţimii P_u a punctelor unei traiectorii (sau linii de curent) din V îi corespunde un ansamblu de limite l_γ. Corespondenţa există între mulţimea P_u şi fiecare dintre limitele l_γ.

Construim o funcţie $L(P)$ de puncte ale spaţiului V, făcînd să corespundă tuturor punctelor de pe o traiectorie P_u una oarecare dintre limitele corespunzătoare.

Funcţia $L(P)$ este deci determinată pe întreg spaţiul V şi este, potrivit definiţiei, invariantă pentru curent: $L(P_u)=L(P)$.

Deoarece V este metric indecompozabilă, $L(P)$ este o constantă, în afară, eventual, de o mulţime de puncte de măsură nulă.

In adevăr, dacă $L(P)$ are mai mult decît o valoare, fie a un număr real care separă aceste valori. Mulţimile

$$V_1=\{P\,|\,L(P)<a\},\quad V_2=\{P\,|\,L(P)\geq a\}$$

sînt invariante. Rezultă că măsura μ a uneia dintre aceste mulţimi este nulă.

Fie, de exemplu, $\mu(V_2)=0$. Continuînd cu V_1 cum am făcut cu V, obţinem o mulţime V_1'. Succesiunea V_1, V_1', V_1'', astfel obţinută, este ordonată prin relaţia de incluziune:

$$V_1\supset V_1'\supset V_1''\ldots$$

Pe de altă parte, intervalul finit în care este cuprins V'_n poate fi făcut să tindă către zero, deci limita este un punct:

$$L(P)=C$$

aproape peste tot.

Să considerăm acum următoarele două posibilităţi:

1°. Mulţimea $P_u=F(P_0,u)$, P_0 fiind un punct din V, acopere aproape tot spaţiul V:

$$m(V-\{P_0\})=0.$$

2°. Ipoteza precedentă nu este verificată. Notăm, pentru a simplifica expunerea, cu r mulţimea punctelor traiectoriei $\{P_u\}$. Fie atunci $[p]$ mulţimea acestor linii de curent.

Fie π o parte a acestei mulţimi de linii de curent şi Π mulţimea (din V) a punctelor tuturor acestor linii. Vom numi cvasimăsură a lui π, limita superioară a probabilităţii mulţimilor măsurabile din V cuprinse în Π. Acest număr, pe care-l vom nota $Q(\pi)$, este bine determinat şi are proprietatea: $Q(\pi)=0$ atrage $P(\Pi)=0$.

Deoarece se elimină ipoteza 1°, există o desfacere a submulţimii π în două părţi π_1 şi π_2, astfel încît $Q(\pi_1)=0$, $Q(\pi_2)\neq 0$; ar rezulta deci că nici una dintre egalităţile $P(\Pi_1)=0$, $P(\Pi_2)=0$ nu este verificată.

Insă Π_1, Π_2 este o desfacere a lui V, părţile Π_1 şi Π_2 sînt invariante şi cum V este metric indecompozabilă, ar trebui să avem una dintre egalităţile precedente: 2° conduce la o contradicţie. Rămîne astfel ipoteza 1°.

Propoziţia (47) se poate atunci scrie

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(P_0,n_m)=C \tag{48}$$

aproape pretutindeni. Din (48) rezultă, aplicînd (33) pentru $P_0\in V$,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m(V)}\int_V\varphi(P_0,n_m)\,\mu(dP_0)=C, \tag{49}$$

unde am notat cu $\mu(dP_0)$ elementul de măsură pe E:

$$\frac{1}{\Omega(E)}\left(\frac{d\sigma}{|\operatorname{grad}H|}\right)_{P_0}.$$

Dar

$$\frac{1}{m(V)}\int_V\varphi(P_0,n_m)\,m(dP_0)=\frac{1}{m(V)}\int_V\frac{1}{n_m}\int_0^{n_m}f(P_s)\,ds\,m(dP_0).$$

Egalitatea mediei temporale și a mediei spațiale pe $H(E)$. Teorema precedentă ne arată că relația (43) este valabilă pentru varietatea $H=E$ metric indecompozabilă, deci

$$\hat{f}=\overline{f},$$

care dă întreaga semnificație teoretică și experimentală valorilor medii pe varietatea ergodică $H=E$.

17. *O interpretare a probabilității microcanonice* (33). Să luăm drept variabilă aleatorie funcția $f(P)$, caracteristică a mulțimii măsurabile A de pe varietatea $H=E$:

$$f(P)=\begin{cases} 1 & P\in A, \\ 0 & P\notin A; \end{cases}$$

$\int_0 f(P_s)\,ds$ este timpul total petrecut de punctul P_s în mulțimea A, iar $\varphi(P_0, t)$ este timpul mediu petrecut în A. Aplicînd teorema ergodică redusă, rezultă că acest timp mediu are o limită determinată (pentru aproape toate punctele din $H=E$), limită egală cu valoarea medie a funcției caracteristice, deci cu măsura $m(A)$ a mulțimii A.

In adevăr, dacă notăm timpul mediu petrecut de punctul P_0 în A, în intervalul $(0, t)$, cu

$$T_{t,\,A}=\varphi(P_0, t),$$

avem:

$$\lim_{t\to\infty} T_{t,\,A}=\frac{1}{\Omega(E)}\int_A \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|}=m(A). \qquad (50)$$

Egalitatea (43) pune în evidență caracterul stabil al probabilității definită de (33) și dă, în același timp, un mijloc experimental pentru determinarea ei.

In adevăr, media temporală se poate calcula experimental, înregistrînd, într-un interval de timp, de cîte ori s-a produs evenimentul A. Media acestui număr raportat la timp este stabilă cînd timpul crește și tinde către o limită care reprezintă probabilitatea.

Avem astfel un nou aspect al principiului care stă la baza legăturii dintre teoria probabilității și experiență și care afirmă că probabilitatea este limita frecvenței.

18. *Sisteme dinamice constituite din două componente.* Ca introducere la cazul unui mare număr de componente, examinăm pro-

blema repartiției energiei între cele două componente ale unui sistem $\sum = \sum_1 + \sum_2$.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ cele $2m$ coordonate canonice din spațiul fazelor S al sistemului $\sum$. Presupunem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = H(x_1, x_2, \ldots, x_r) + H(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{2m}).$$

Notăm cu S_1 spațiul fazelor sistemului $\sum_1$ de dimensiune r și cu S_2 spațiul fazelor sistemului $\sum_2$ de dimensiune $2m-r$.

Să reamintim că, în general, spațiul S nu este identic cu spațiul R_{2m}, ci numai cu un domeniu simplu conex din R_{2m}, mai exact cu închiderea acestui domeniu.

Fie A_1 o mulțime măsurabilă din S_1 și $A = A_1 \times S_2$ mulțimea corespunzătoare din S.

Introducem pentru sistemul S_1 probabilitatea *condiționată*

$$\Pi_1(A_1) = p(A), \tag{51}$$

unde $p(A)$ este probabilitatea (microcanonică) a sistemului $\sum$, presupus a fi *menținut cu energia constantă* E. Prin urmare,

$$\Pi_1(A_1) = \frac{1}{\Omega(E)} \frac{d}{dE} \int_{H<E} \varphi_A \, dP,$$

φ_A fiind funcția caracteristică a mulțimii A în S, iar φ_A funcția caracteristică a mulțimii A în $H=E$.

Cum însă $\varphi_A = \varphi_{A_1}$, unde φ_{A_1} este funcția caracteristică a mulțimii A_1 în S_1, avem (30):

$$\int_{H<E} \varphi_A dP = \int_{S_1} \varphi_{A_1} dP_1 \int_{H_2<E-H_1} dP_2 = \int_{A_1} \Phi_2(E-H_1)\, dP_1.$$

Insă, potrivit cu (32),

$$\frac{d}{dE} \int_{A_1} \Phi_2(E - H_1)\, dP_1 = \int_{A_1} \Omega_2(E-H_1)\, dP_1.$$

Prin urmare,

$$\Pi_1(A_1) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{A_1} \Omega_2(E-H_1)\, dP_1. \tag{52}$$

Densitatea acestei probabilități condiționate este

$$\rho_1(P_1) = \frac{\Omega_2(E-H_1)}{\Omega(E)}; \quad P_1 \in S_1.$$

Dacă mulțimea A_1 este dată de condiția

$$A_1 = \{P_1 \mid E_1' < H_1 < E_1''\}$$

și cum $\Omega_2(E-H_1)$ depinde numai de valorile energiei, relația (43) devine

$$\Pi_1(A_1) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{A_1} \Omega_2(E-H_1)\, dE_1 \frac{d\sigma_1}{|\operatorname{grad} H_1|} =$$

$$= \frac{1}{\Omega(E)} \int_{E_1'}^{E_1''} \Omega_2(E-E_1)\, dE_1 \int_{H_1=E_1} \frac{d\sigma_1}{|\operatorname{grad} H|}$$

și, în definitiv,

$$\Pi_1\{E_1' < H_1 < E_1''\} = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{E_1'}^{E_1''} \Omega_1(E_1)\, \Omega_2(E-E_1)\, dE_1.$$

Din această formulă, deoarece

$$\Pi_1\{0 < H_1 < E\} = 1,$$

rezultă relația (39):

$$\Omega(E) = \int_0^E \Omega_1(E_1)\, \Omega_2(E-E_1)\, dE_1.$$

19. *Asupra aplicațiilor teoriei probabilităților în mecanica statistică.* Dacă aceste aplicații s-ar mărgini la definițiile și relațiile care preced, am putea elimina termenul de probabilitate ca și, de altfel, acela de mecanică statistică. Am determinat pînă aici relații de măsură pentru mărimi asociate unui sistem mecanic. Dacă sistemul este un corp solid, de exemplu, sau mai general un sistem avînd un mic număr de grade de libertate, toate considerațiile precedente își găsesc aplicare și pot constitui punctul de plecare al unui nou mod de a prezenta mecanica sistemelor. Acesta este chiar unul dintre modurile de la care pornește prezentarea mecanicilor cuantice.

Numai cînd sistemul — ne referim la mecanica clasică — are un număr mare de componente și, implicit, un număr mare de grade de libertate — care depășește pe acela al componentelor — obiectul poate interesa mecanica statistică, iar metodele vor fi cele specifice teoriei probabilităților.

Scanned with OKEN Scanner

20. *Sisteme dinamice constituite dintr-un număr mare de componente.* Mărimile importante ale mecanicii statistice sînt reprezentate de variabile sau funcţii aleatorii scalare sau vectoriale, definite sau generate precum urmează.

Presupunem că fiecare dintre componentele $\sum_l (l=1,2,...,N)$ ale sistemului $\sum$ are acelaşi număr k de grade de libertate. Vom avea deci

$$H_l = H_l(x_l, y_l, \ldots, w_l), \quad l=1, 2, \ldots, N; \tag{53}$$

numărul literelor $x, y, \ldots, w$ fiind k, şi $2m = k \cdot N$.

Notăm cu S_l spaţiul fazelor componentei $\sum_l$. Prin ipoteză

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N, \quad H = H_1 + H_2 + \ldots + H_N. \tag{54}$$

Deoarece componentele $\sum_l$ sînt din cînd în cînd în interacţiune, au deci în general schimburi de energie între ele, variabilele H_l nu sînt constante în timp, prin urmare, cîmpul de probabilitate care se impune pentru fiecare dintre aceste componente este cel canonic.

Fie acum $f(x_l, y_l, \ldots, w_l) = f(P_l)$ o variabilă aleatorie în S_l, spaţiul fazelor sistemului $\sum_l$ pentru $l=1, 2, \ldots, N$. Fiecare dintre aceste variabile se extinde la spaţiul S după cum urmează:

$$f_l(P) = f_l(x_1, y_1, \ldots, w_1;\ x_2, y_2, \ldots, w_2; \ldots, w_N) = f(x_l, y_l, \ldots, w_l) \tag{55}$$

pentru orice punct $P_h(x_h, y_h, \ldots, w_h)$ cu $h \neq l$.

Există mai multe moduri de a trata variabilele $f_l(P)$.

1°. Un mod constă în a le considera ca variabile libere în S, cu distribuţie canonică în afară de timp. In acest caz, variabilele $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_N(P)$ *sînt independente în ansamblul lor.*

Demonstraţia acestei afirmaţii este imediată.

Observăm mai întîi că mulţimea

$$\{a_{k_1} < f_{k_1}(P) < b_{k_1},\ a_{k_2} < f_{k_2}(P) < b_{k_2}, \ldots, a_{k_s} < f_{k_s} < b_{k_s}\}$$

este intersecţia mulţimilor

$$A_{k_s} = A_{k_s} \times (S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N)',$$

unde

$$A_{k_s} = \{a_{k_s} < f(P_{k_s}) < b_{k_s}\},$$

iar accentul indică lipsa, din produsul închis în paranteză, a factorului S_{k_s}.

Această intersecție este deci egală cu

$$A_{k_1} \times A_{k_2} \times \ldots \times A_{k_r} \times S_{h_1} \times \ldots \times S_{h_{N-r}},$$

unde $k_1, k_2, \ldots, k_r, h_1, \ldots, h_{N-r}$ sînt cele N numere de la 1 la N.

Se verifică imediat, după expresia distribuției canonice (12), că

$$P\left(\bigcap_{s=1}^{r} A_{k_s}\right) = \frac{1}{\Psi(\alpha)} \int_{A_{k_1} \times A_{k_2} \times \ldots \times A_{k_r} \times S_{h_1} \times \ldots \times S_{h_{N-r}}} e^{-\alpha H} dP_1 dP_2 \ldots dP_N =$$

$$= \frac{1}{\Psi(\alpha)} \Psi_{h_1} \Psi_{h_2} \ldots \Psi_{h_{N-r}} \left(\int_{A_{k_1}} e^{-\alpha H_{k_1}(P_{k_1})} dP_{k_1}\right)\left(\int_{A_{k_2}} e^{-\alpha H_{k_2}(P_{k_2})} dP_{k_2}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(\int_{A_{k_r}} e^{-\alpha H_{k_r}(P_{k_r})} dP_{k_r}\right) = \prod_{s=1}^{r} P(A_{k_s}). \tag{56}$$

Această egalitate caracterizează independența.

2°. Un alt mod de a considera variabilele $f_l(P)$ este indicat de măsura microcanonică implicată de procesul mecanic al sistemului. In adevăr, în acest proces,

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_N = E. \tag{57}$$

Prin urmare, variabila $f_l(P)$ trebuie considerată pe varietatea $H=E$, definită de (48) pentru un E dat; în consecință, ea are o distribuție microcanonică:

$$M(A_k) = \frac{1}{\Omega(E)} \int_{H=E} \varphi_{A_k} \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H|} = \frac{1}{\Omega(E)} \frac{d}{dE} \int_{H<E} \varphi_{A_k} dP.$$

Variabilele $f_l(P)$ cu distribuția microcanonică nu sînt independente în ansamblul lor ($l=1, 2, \ldots, N$). Exemplul imediat este oferit chiar de variabilele $H_1, H_2, \ldots, H_N$.

3°. In sfirșit, un al treilea mod de a considera variabilele $f_l(P)$ este acela temporar: $P=P_t$.

Acest mod este deosebit de interesant, mai ales pentru că ne dă prilejul de a examina îndeaproape descompunerea (54) și cu aceasta relațiile dintre componente.

Dacă aplicăm hamiltonianului H (54) ecuațiile (3), ele însele se vor împărți în sisteme complet distincte, care vor da

respectiv $H_1=E_1$, $H_2=E_2,\ldots,H_N=E_N$, E_1, $E_2,\ldots,E_N$ fiind constante legate prin condiția inițială $\sum E_l=E$. Cele N sisteme *nu au între ele interacțiune.*

Prin urmare, dacă rămînem la acest punct de vedere, trebuie să aplicăm fiecărei variabile distribuția microcanonică proprie spațiului ei, să construim spațiul S din produsul cartezian al spațiilor S_l și o măsură egală cu produsul măsurilor microcanonice.

In acest spațiu și cu această măsură, variabilele sînt independente.

Pe de altă parte, urmărirea în timp a funcției $f_l(P)$, pentru un l fix, ne va conduce la problemele puse în teorema ergodică.

In realitate, aceste sisteme fără interacțiune între componente nu prezintă nici un interes. Și ele nici nu constituie obiecte efective ale mecanicii statistice.

21. *Precizarea structurii dinamice a sistemelor care constituie obiecte ale mecanicii statistice.* Această precizare va fi făcută aici numai în termeni matematici. Suportul ei fizic se poate găsi în analogia cu mecanismele speciale ale teoriei cinetice, dar nu vom intra în nici o considerație fizică propriu-zisă. Rezumînd cele spuse mai sus, am considerat pînă aici, în mod implicit, drept caracteristice ale sistemului $\sum$ ecuațiile (3) și descompunerea (54); $H_l=H_l(x_l, y_l,\ldots, w_l)$ sînt funcții determinate și uniforme, independente explicit de timp, continue și avînd derivate de ordinul întîi continue.

Această reprezentare este, cum am văzut, insuficientă. Ea trebuie modificată fără a altera caracterul mecanic al sistemului, ci numai completîndu-l cu aspecte care au fost lăsate la o parte în reprezentările (3) și (54).

Intervenția interacțiunii dintre componente va fi precizată sub următoarea formă matematică:

Variabilele $f(P_l)$ sînt funcții explicite de timp $f(P_l; t)$; ca funcții de timp, ele se comportă ca o funcție scară, își păstrează valoarea între două discontinuități.

Funcțiile $f(P_l; t)$ au aceleași puncte de discontinuitate ca energia respectivă a componentei $H_l(P_l; t)$.

Dacă t_0 este un punct de discontinuitate, există cel puțin două componente $\sum_{l'}$ și $\sum_{l''}$ în interacțiune: H_{l_1} și H_{l_2} variază, dar

$$H_{l_1}(P_{l_1}; t)+H_{l_2}(P_{l_2}; t)$$

păstrează o valoare constantă cînd t trece prin punctulul t_0.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei componente $\sum_t$, într-un interval $(0, T)$ este finită și *uniform distribuită*, oricare ar fi T.

Pentru fiecare dintre variabilele $f(P, t)$ punctele de discontinuitate sînt fenomene *rare* în sensul schemei Poisson. De aceea, punctele de discontinuitate în care mai mult de două componente sînt în interacțiune între ele, sau punctele în care mai multe perechi sînt în interacțiune, sînt foarte rare și vor fi neglijate în considerațiile ulterioare dezvoltate aici.

22. *Spațiul fază-timp. Evaluarea numărului de componente independente.* Potrivit considerațiilor anterioare, la un moment dat t putem întîlni două cazuri:

a) în momentul t nu are loc nici o interacțiune; în acest moment, cele N variabile trebuie considerate independente;

b) în momentul t are loc o interacțiune între două componente.

In acel moment, $N-2$ variabile sînt independente între ele și de cele două care sînt în interacțiune, ca și cum am avea $N-1$ componente independente.

23. Pentru a face să intervină timpul, este indicat *să construim* mai întîi *spațiul fază-timp.*

Vom construi aici, pentru simplificarea calculelor, un astfel de spațiu discontinuu.

Fie θ un interval de timp caracteristic pentru sistem. Presupunem că observațiile se fac la intervale de timp egale cu θ, și anume la momentele $0, \theta, 2\theta, \ldots, (n-1)\theta$, astfel încît să avem o descriere cît mai completă a stării și evoluției sistemului.

Ipoteza fundamentală în alegerea intervalului θ este că discontinuitățile sînt rare față de acest interval: dacă x *este numărul punctelor de discontinuitate* într-o secundă și $d_\theta = \frac{1}{\theta}$ este numărul intervalelor θ într-o secundă, atunci

$$\frac{x}{d_\theta} = x\theta$$

este un număr mic.

24. *Spațiul fază-timp este produsul cartezian* $S \times s$, unde s este șirul $0, \theta, 2\theta, \ldots, (n-1)\theta, \ldots$ Noi vom lucra cu părțile din acest spațiu care sînt reprezentate de $S \times s_n$ și corespund succesiunii primelor n observații.

In spațiul $S \times s_n$ avem în total $N \times n$ componente, cîte N la fiecare moment.

In intervalul $T=n\theta$ avem $Tx_T=n\theta x_T$ puncte de discontinuitate, deci tot atîtea perechi de componente în interacţiune. Aceasta înseamnă că în acest interval avem

$$N\times n-n\theta x_T$$

componente independente. Dintre acestea, $N\times n-2n\theta x_T$ sînt componente simple, la care se adaugă $n\theta x$ componente constituite fiecare din grupul de două componente în interacţiune.

O analiză mai aprofundată, mai cu seamă pentru unele sisteme speciale, conduce la considerarea interacţiunilor şi pentru mai mult de două componente, în acelaşi timp.

25. *Distribuţia medie clasică* (statică) rezultă din aplicarea concluziilor relative la media variabilelor $f_l(P)$, definite pentru componentele sistemului $\sum$ la un anumit moment t.

Aplicarea formulei (56) nu este automată, deoarece, aşa cum am văzut la punctul 22, deşi în general cele N variabile sînt independente, deci formula (56) este aplicabilă, există momente în care cîte o pereche de sisteme sînt în interacţiune şi independenţa globală încetează. La un astfel de moment avem $N-1$ componente independente, dar una dintre aceste componente este constituită din două componente originale ale sistemului.

Cum se vede imediat, aceste circumstanţe aduc o uşoară modificare în formulele (17), § 3, cap. VI.

Presupunînd, pentru a simplifica scrisul, că cele două componente în interacţiune la un moment dat t sînt $\sum_{N-1}$ şi $\sum_N$, vom avea:

$$\mu'^2_{N-1}=M\{[f_{N-1}+f_N-M[f_{N-1}+f_N]]^2\},$$

$$\rho'^3_{N-1}=M\{[f_{N-1}+f_N-M[f_{N-1}+f_N]]^3\},$$

celelalte μ_l şi ρ_l $(l=1, 2, \ldots, N-2)$ avînd definiţiile din § 3, cap. VI

Vom avea apoi

$$\mu'^2_{(N)}=\mu_1^2+\ldots+\mu^2_{N-2}+\mu'^2_{N-1},$$

$$\rho'^3_{(N)}=\rho_1^3+\ldots+\rho^3_{N-2}+\rho'^3_{N-1}.$$

Rezultă şi aici egalităţile şi inegalităţile (17), § 3, cap. VI, însă cu valori diferite pentru $k_{(N)}$ şi $h_{(N)}$. Vom însemna aceste valori cu $k'_{(N)}$ şi $h'_{(N)}$.

Formula (56) trebuie aplicată variabilei

$$g'_N(P)=\frac{1}{\mu'_{(N)}}\sum[f_l-M[f_l]]$$

și obținem pentru această variabilă funcția caracteristică

$$\varphi'_N(\tau)=e^{-\frac{1}{2}\tau^2+A'_N N-\frac{1}{2}};$$

$A'_N=A_N$ la momentele în care nu sînt interacțiuni; în momentele de interacțiune, A'_N diferă puțin de A_N.

Deoarece

$$g_N(P)=\frac{\mu'_{(N)}}{\mu_{(N)}}g'_N(P)=\frac{k'_{(N)}}{k_{(N)}}g'_N(P),$$

avem în consecință

$$\varphi_N(\tau)=e^{-\frac{1}{2}\frac{k'^2_{(N)}}{k^2_{(N)}}\tau^2+A''_N N-\frac{1}{2}}, \quad |\tau|<T_N, \qquad (58)$$

pe care se citește ușoara variație pe care o suferă legea de repartiție a variabilei $g_{(N)}(P)$ cînd trecem printr-un moment de interacțiune.

Asupra acestei formule facem observația fundamentală:

N este numărul componentelor sistemului, deci este un număr fix.

Prin urmare, nu se poate vorbi de o lege a lui Gauss, ci numai de vecinătatea acestei legi. Aprecieri asupra acestei vecinătăți nu se pot face decît dacă se dau cîteva constante caracteristice ale sistemului, în primul rînd A, B și N.

Ne oprim aici cu aceste considerații, deoarece este evident că indicațiile date de (58) sînt foarte reduse.

Pentru a avea un aspect mai complet al fenomenului, vom trece la spațiul *fază-timp*, în care evoluția sistemului către o repartiție medie normală apare în mod categoric.

26. *Distribuția medie dinamică în spațiul fază-timp. Repartiția gaussiană obținută ca lege limită în timp.* Fie $S\times s_n$ spațiul fază-timp definit la punctul 22 și cele $N\times n$ componente pe care le vom numerota $h_l(P)$, $(l=1, 2, \ldots, N\times n)$.

Dintre aceste componente $N\times x-n\theta x\,T$ sînt independente și anume, $Nn-2n\theta x_T$ sînt componente simple și $n\theta x_T$ componente compuse din cîte două componente simple originare $(T=n\theta)$.

Măsura pe mulțimile boreliene ale acestui cîmp este produsul măsurilor microcanonice ale celor $N+\theta_t$ componente independente, fiecare măsură considerată în spațiul respectiv al componentei.

Fie $h_1, h_2, \ldots, h_{Nn-2n\theta x}$ cele $Nn-2n\theta x$ componente simple și $h_{Nn-2n\theta x+1}, \ldots, h_{Nx}$ cele $2n\theta x$ componente pe care le vom considera perechi, în ordinea în care sînt scrise: ultima pereche este formată din h_{Nn-1} și h_{Nn}.

Vom avea de considerat două momente medii de ordinul al doilea:

$$\mu^2_{[Nn]^2} = \sum_1^{Nn}{}_l [h_l - M[h_l]]^2 = k^2_{[Nn]} Nn \tag{59}$$

și

$$\mu'^2_{[Nn]} = \mu^2_{[Nn-n\theta x]} = \sum_1^{Nn-2n\theta x}{}_l \mu_l^2 + \sum_r M[(h_r + h_{r+1} - M[h_r + h_{r+1}])^2]. \tag{60}$$

Formula (56) aplicată variabilei medii

$$f^1_{[Nn]}(P) = \frac{1}{\mu'_{[Nn]}} \sum_1^{Nn}{}_l [h_l - M[h_l]] \tag{61}$$

ne dă pentru funcția caracteristică expresia

$$\varphi^1_{[Nn]}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2 + A^1_{Nn}\left(1-\frac{x\theta}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}{}_n^{-\frac{1}{2}}{}_N^{-\frac{1}{2}}} \tag{62}$$

In această expresie, n este timp $n\theta = t$. Dacă lăsăm celelalte elemente fixe și facem timpul să crească indefinit, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^1_{[Nn]}(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau^2}. \tag{63}$$

Prin urmare, *variabila medie* $f'_{[Nn]}$ *tinde cu timpul* (și aceasta evident foarte repede), *către legea lui Gauss.*

Acest rezultat a fost obținut în teoria cinetică cu ajutorul teoremei H a lui Boltzmann.

In considerațiile precedente, el a fost obținut fără alte ipoteze decît acelea de uniformitate și distribuție a momentului de interacțiune presupuse în număr finit în orice interval de timp finit.

Valoarea medie $f^1_{(Nn)}$ a rezultat din normarea sumei $\sum [h_l - M[h_l]]$ cu abaterea medie pătratică $\mu^1_{[Nn]}$, a cărei valoare depinde și de modul cum sînt grupate componentele la fiecare moment.

De aceea, vom examina comportarea valorii medii a sumei precedente normată cu $\sqrt{Nn}$, care nu include elemente aleatorii:

$$f^{II}_{[Nn]}(P)=\frac{1}{\sqrt{Nn}}\sum_{1}^{Nn}{}_{l}[h_l-M[h_l]]. \tag{64}$$

Intre cele două variabile $f^{I}_{(Nn)}$ și $f^{II}_{(Nn)}$ există relația

$$f^{II}_{[Nn]}=\frac{\mu'_{[Nn]}}{\sqrt{Nn}}f^{I}_{Nn}.$$

Funcția caracteristică $\varphi^{II}_{[Nn]}(\tau)$ va fi deci exprimată prin

$$\varphi^{II}_{[Nn]}(\tau)=\varphi^{I}_{[Nn]}\left(\frac{\mu'_{[Nn]}}{\sqrt{Nn}}\tau\right),$$

deci

$$\varphi^{II}_{[Nn]}(\tau)=e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu'^2_{[Nn]}}{\sqrt{Nn}}\tau^2+A^n_{Nn}\omega^{-\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}}}. \tag{65}$$

Partea principală din această lege este funcția caracteristică gaussiană

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{Nn}\mu'^2_{[Nn]}\tau^2}. \tag{66}$$

Din (60) se deduce imediat că

$$\frac{1}{Nn}\mu'^2_{[Nn]}=A^2l^2_{N,n}+4A^2L_{N,n}\frac{\theta x_T}{N},$$

unde

$$\frac{B}{A}<l_{N,n}<1, \quad |L_{N,n}|<1.$$

In particular, dacă toate componentele sînt identice, avem:

$$\mu_l^2=\mu^2, \quad M[[h_r+h_{r+1}-M[h_r+h_{r+1}]]]^2=\nu^2,$$

$$\frac{1}{Nn}\mu'^2_{[Nn]}=\left(1-2\frac{\theta x_T}{N}\right)\mu^2+\frac{\theta x_T}{N}\nu^2.$$

Dacă

$$\lim_{T\to\infty}x_T=x, \tag{67}$$

există, atunci, făcînd în (65) $n\to\infty$, găsim drept lege limită

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{II}_{[Nn]}(\tau)=e^{-\frac{1}{2}\left[\mu^2-\frac{\theta x}{N}(2\mu^2-\nu^2)\right]\tau^2}. \tag{68}$$

Această lege depinde încă de θ. In cadrul ipotezei timpului continuu, vom face $\theta=0$ și limita precedentă este

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \theta\to 0}} \varphi^{II}_{[Nn]}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\mu^2\tau^2}. \qquad (69)$$

Dacă există un $\theta\neq 0$ cu semnificație fizică pentru sistem, atunci la exponențială rîmîne x și cum limita de la (67) nu există în general, legea (68) este în realitate o mulțime de legi limită ale căror fluctuații corespund unor constatări experimentale bine cunoscute.

27. *Legea lui Maxwell.* Singura exemplificare pe care o vom da pentru teoria dezvoltată la punctele precedente este un sistem constituit dintr-un gaz monoatomic ideal, închis într-un recipient, la temperatura exterioară constantă, fără schimburi energetice cu exteriorul.

Componentele sînt moleculele gazului în număr total N și cu masa m. Mărimea aleatorie asociată fiecărei molecule este vectorul viteză $V_i=V(u_i,v_i,w_i)$; $(i=1,2,\ldots,N)$, unde u_i,v_i,w_i sînt cele trei componente ale lui V. Ca funcții de coordonatele de fază avem

$$u_i=\frac{1}{m}p_i,\quad v_i=\frac{1}{m}q_i,\quad w_i=\frac{1}{m}r_i \qquad (i=1,2,\ldots,N).$$

Mișcarea sistemului molecular ascultă, în orice interval în care nu se produc ciocniri, de un sistem de ecuații canonice. Fiecare moleculă are, între două ciocniri, o mișcare depinzînd numai de cîmpul greutății.

Interacțiune între molecule, în înțelesul considerat mai sus, este numai în momentul unei ciocniri. Repartiția acestor ciocniri pare să intre în cadrul uniformității presupusă la punctul 22.

Condițiile de limitare (1), § 3, cap. VI sînt evident verificate. Verificarea condiției (2), § 3 cap. VI se face de asemenea fără greutate.

Vom putea deci aplica teorema limită de la punctul 24, în spațiul fază-timp, $S\times s_n$, al gazului considerat mai sus.

Pentru a da un sens mai puțin artificial teoremei limită, așa cum am lămurit și la punctul 26, vom face normarea sumei numai prin Nn.

Obținem următoarele teoreme:

I. *Funcția caracteristică a vitezei medii normată*

$$V_{N,n}=\frac{1}{\sqrt{Nn}}\sum_1^{Nn}[V_i-M[V_i]]$$

este

$$\varphi_{N,n}(\tau)=e^{-\frac{1}{2}l_{hk,(N)}\tau^h T^k+L_{N,n}n^{-\frac{1}{2}}},$$

unde

$$h,k=1,2,3,\quad 0<l_{hk,(Nn)}<l\qquad |L_{N,n}|<L_\theta$$

este o constantă absolută, iar L_θ depinde numai de θ, ales arbitrar, astfel că $i=1,2$; $|\tau_1|$, $|\tau_2|$, $|\tau_3|\leqq\theta$.

II. *Cînd $T=n\theta$ crește, repartiția vitezei medii normate $V_{N,n}$ tinde foarte repede către o repartiție gaussiană sau oscilează între repartițiile gaussiene care se obțin din funcțiile caracteristice*

$$e^{-\frac{1}{2}l_{hk,[Nn]}\tau^h\tau^k},$$

făcînd pe $n\to\infty$.

Rezultatul se poate enunța, cum se constată imediat, și în modul următor:

Din orice șir de observații făcute la momentele n_1, n_2,... putem alege un șir a cărui medie normată se exprimă printr-o repartiție gaussiană.

In ipoteza timpului continuu, legea limită pentru $\theta=0$, $n\to\infty$, este determinată și anume

$$\varphi(\tau)=e^{-\frac{1}{2}l_{hk}\tau^h\tau^k},$$

unde

$$l_{hk}=[l_{hk,[Nn]}]_{\theta=0},$$

cum se verifică imediat.

Pentru acest capitol se va vedea bibliografia de la sfîrșitul cap. X.

CAPITOLUL X

CÎMPURI DE EVENIMENTE PROBABILIZATE ÎN MECANICA CUANTICĂ

Evenimentele Mecanicii cuantice sînt în primul rînd pozițiile în spațiul R^n al configurațiilor și valorile cuantice ale mărimilor respective.

Probabilizarea acestor evenimente se face cu ajutorul unei funcții de stare $\omega(P)$, care este o funcție complexă supusă la

condiția $\int_{R^n} \omega(P)\,\bar{\omega}(P)\,dP < \infty$, ceea ce îngăduie să definim măsura unei mulțimi măsurabile din spațiul R^n prin integrala

$$k \int_A \omega(P)\,\bar{\omega}(P)\,dP,$$

k fiind un factor de normare.

Introducerea spațiului funcțiilor de stare, care este un spațiu Hilbert, îngăduie reprezentarea mărimilor fizice prin operatori liniari autoadjuncți, ale căror valori proprii sînt valorile mărimii fizice corespunzătoare.

Probabilitățile acestor mărimi se definesc cu referire la o funcție de stare (de undă) determinată.

Ne mărginim să prezentăm aceste poziții de plecare ale aplicațiilor conceptelor probabiliste în mecanica cuantică numai în cazurile cele mai simple, ca o simplă introducere într-o teorie care intră prea mult în fizica propriu-zisă pentru a putea fi în întregime și în puține rînduri prezentată aici.

§ 1. Spațiul hilbertian al funcțiilor de stare

1. *O funcție de stare a unui sistem — care este o funcție de undă* — $\Phi(P)$, unde P este un punct în spațiul R^n, euclidian, cu n dimensiuni, este o funcție, în general, complexă pentru care integrala

$$\| \Phi \| = \int_{R^n} |\Phi(P)|^2\,dP \tag{1}$$

există și are o valoare finită.

Două funcții de stare $\Phi_1(P)$ și $\Phi_2(P)$ sînt echivalente, din punctul de vedere al Mecanicii statistice, dacă

$$\int_{R^n} |\Phi_1(P) - \Phi_2(P)|^2\,dP = 0. \tag{2}$$

Să considerăm funcțiile de stare ca puncte ale unui spațiu făcînd să corespundă funcțiilor echivalente un punct unic, reprezentant al fiecărei clase de funcții de stare echivalente.

Cu această convenție putem enunța următoarea propoziție fundamentală: *mulțimea funcțiilor de stare este un spațiu Hilbert.*

Să notăm cu $\mathcal{H}$ acest spațiu. Vom verifica afirmația noastră arătînd mai întîi că $\mathcal{H}$ este un spațiu Banach, adică un spațiu liniar, normat și complet.

Scanned with OKEN Scanner

a) Liniaritatea se verifică imediat: dacă $|\Phi_1(P)|^2$ şi $|\Phi_2(P)|^2$ sînt integrabile în R^n, atunci

$$|\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2|^2=(\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2)(\bar{\lambda}_1\bar{\Phi}_1+\bar{\lambda}_2\bar{\Phi}_2)$$

este de asemenea integrabil.

b) $\|\Phi\|$ dat de (1) este o *normă* pentru Φ în acest spaţiu. In adevăr, dacă $\Phi\equiv 0$ norma sa este, evident, zero. Iar dacă $\|\Phi\|$ este zero, potrivit convenţiei noastre avem numai un element al spaţiului reprezentat de elementul 0 care are această normă.

Din (1) rezultă imediat celelalte două proprietăţi caracteristice ale normei

$$\|\lambda\Phi\|=|\lambda|\,\|\Phi\|,$$

$$\|\Phi_1+\Phi_2\|\leq\|\Phi_1\|+\|\Phi_2\|.$$

c) *Completitudinea* spaţiului rezultă din proprietăţile integralei. Ea se enunţă în modul următor:

Dacă $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ este un şir Cauchy în sensul că

$$\int_{R^n}|\Phi_l(P)-\Phi_m(P)|^2\,dP\to 0$$

cînd $l\to\infty$, $m\to\infty$, există o funcţie $\Phi=\lim_{n\to\infty}\Phi_n$ pentru care

$$\int_R|\Phi_l(P)-\Phi(P)|^2\,dP\to 0$$

cînd $l\to\infty$.

In acest spaţiu, pentru orice pereche de funcţii (Φ, Ψ) *există* [1] următoarea integrală, numită produs scalar al elementelor Φ şi Ψ:

$$<\Phi,\Psi>=\int_{R^n}\Phi(P)\bar{\Psi}(P)\,dP, \qquad (3)$$

unde $\bar{\Psi}(P)$ se obţine din $\Psi(P)$ schimbînd pe $i=\sqrt{-1}$ în $-i$.

Produsul scalar definit de (3) are următoarele proprietăţi evidente:

$$<\Phi,\Psi>=\overline{<\Psi,\Phi>}$$

$$<\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2,\Psi>=\lambda_1<\Phi_1,\Psi>+\lambda_2<\Phi_2,\Psi>$$

$$<\Phi,\mu_1\Psi_1+\mu_2\Psi_2>=\bar{\mu}_1<\Phi,\Psi_1>+\bar{\mu}_2<\Phi,\Psi_2>.$$

Cu aceasta, spaţiul considerat este organizat ca spaţiul Hilbert.

---

[1]) Existenţa rezultă din următoarea inegalitate a lui Schwartz:

$$\left[\int_{R^n}|\Phi(P)\bar{\Psi}(P)|\,dP\right]^2\leq\int_{R^n}|\Phi(P)|^2dP\cdot\int_{R^n}|\Psi(P)|^2dP.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. *Operatori liniari autoadjuncți în* $\mathcal{H}$. Orice transformare T aplicabilă tuturor funcțiilor din $\mathcal{H}$, sau numai unora dintre ele, și care are ca rezultat o altă funcție din $\mathcal{H}$ este *operator* liniar dacă

$$T(\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2)=\lambda_1 T\Phi_1+\lambda_2 T\Phi_2$$

pentru orice sistem de două funcții Φ_1, și Φ_2 din $\mathcal{H}$, pentru care $T\Phi_1\in\mathcal{H}$, $T\Phi_2\in\mathcal{H}$ și oricare două numere complexe λ_1 și λ_2.

Operatorul T^* conjugat lui T este bine și unic definit de egalitatea

$$T^*\Phi=(\overline{T\Phi}), \tag{4}$$

deci transformă o funcție Φ în funcție $(\overline{T\Phi})$, ori de cîte ori $T\Phi$ există.

Se verifică imediat că T^* este liniar o dată cu T.

Operator autoadjunct este orice operator liniar pentru care

$$<T\Phi,\ \Psi>=<\Phi,\ T^*\Psi>, \tag{5}$$

oricare ar fi funcțiile Φ și Ψ din $\mathcal{H}$ pentru care $T\Phi$ și $T\Psi$ sînt de asemenea în $\mathcal{H}$.

Exemple de operatori liniari autoadjuncți:

1. Multiplicatori întregi:

Fie $F(P)$ o funcție reală oarecare din $\mathcal{H}$. Operatorul T definit prin egalitatea

$$T\Phi\equiv F\Phi,$$

pentru orice Φ din $\mathcal{H}$, este evident liniar și autoadjunct.

2. Operatorii diferențiali $T_k=-ia\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

Să considerăm subspațiul $\mathcal{H}$ constituit din funcțiile Φ din $\mathcal{H}$, care:

a) admit derivate de ordinul întîi aparținînd subspațiului $\mathcal{H}$:

$$\frac{\partial\Phi(P)}{\partial x_j}\in\mathcal{H};$$

b) se anulează cînd oricare dintre variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tinde spre $\pm\infty$.

Operatorii T_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, definiți prin egalitățile

$$\Phi\in\mathcal{H}$$

$T_k\Phi\equiv\alpha\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Phi$ *pentru* $\alpha=ai$ *cu* a *real*, sînt liniari și autoadjuncți.

Liniaritatea este evidentă. Cea de a doua proprietate rezultă din verificarea egalității

$$\int_{R^n} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \overline{\Psi}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_{R^n} \Phi \left(\alpha \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_k} \right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n ,$$

care corespunde definiției (5). Insă integrala din membrul întîi, după efectuarea unei integrări prin părți și ținînd seamă de b), ne dă

$$-\int_{R^n} \alpha \Phi \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_k} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

Egalînd cu membrul al doilea, rezultă ca o condiție de autoadjuncție $\overline{\alpha} = -\alpha$, ceea ce dă pentru α o valoare pur imaginară $\alpha = ai$.

O observație importantă care ne ajută să constituim operatori autoadjuncți cu ajutorul operatorilor T_k este următoarea:

Dacă doi operatori T' și T'' sînt liniari și autoadjuncți și dacă sînt comutativi ($T'T''\Phi = T''T'\Phi$ pentru orice Φ), atunci și produsul $T'T''$ este autoadjunct.

In felul acesta se verifică imediat că $T_{jj} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $T_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$ sînt operatori liniari autoadjuncți în subspațiul $\mathcal{K}'' \subset \mathcal{H}$ al funcțiilor care admit derivate de primele două ordine în $\mathcal{H}$ și pentru care aceste funcții împreună cu derivatele lor de ordinul întîi se anulează la infinit.

3. *Valorile și funcțiile proprii ale unui operator autoadjunct.* Se consideră un operator T și subspațiul $\mathcal{H}_T$ al lui $\mathcal{H}$ al funcțiilor Φ pentru care $T\Phi \in \mathcal{H}$.

Problema reprezentată de următoarea ecuație

$$T\Phi = \lambda\Phi \tag{6}$$

are o însemnătate fundamentală pentru aplicațiile în mecanica cuantică. Ea poate fi exprimată astfel:

Să se găsească funcțiile de stare din $\mathcal{H}_T$ pentru care efectul T este echivalent cu acela al unei mărimi reale λ, considerată ca multiplicator.

Valorile λ pentru care există cel puțin o soluție Φ aparținînd subspațiului de funcții uniforme $\mathcal{H}_T$ se numesc *valorile proprii* ale operatorului T, iar soluțiile Φ corespunzătoare sînt *funcțiile proprii* corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea valorilor proprii ale operatorului T constituie *spectrul* acestui operator.

Intrucît nu ne propunem decît să arătăm cum se pot constitui cîmpuri de probabilitate, ne vom mărgini la cazul cel mai simplu al acestor operatori al căror spectru este discret, iar fiecărei valori λ_j îi corespunde o singură funcție proprie Φ_j determinată, în afară de o constantă multiplicativă.

Folosim această constantă pentru a norma aceste funcții în înțelesul că

$$\int_{R^n} \Phi_j \overline{\Phi}_j \, dP = 1. \tag{7}$$

Se demonstrează imediat că funcțiile proprii formează un *sistem ortogonal*, adică

$$\int_{R^n} \Phi_j(P)\, \overline{\Phi}_k(P)\, dP = 0 \qquad j \neq k. \tag{8}$$

Faptul rezultă din proprietatea de autoadjuncție a operatorului și din b). In adevăr, ținînd seamă de b), egalitatea

$$<T\Phi_j,\ \Phi_k> = <\Phi_j,\ T\Phi_k>$$

atrage după sine

$$\lambda_j <\Phi_j,\ \Phi_k> = \lambda_k <\Phi_j,\ \Phi_k>.$$

Cum $\lambda_j \neq \lambda_k$ dacă $j \neq k$, rezultă

$$<\Phi_j,\ \Phi_k> = 0.$$

4. *Reprezentarea funcțiilor din $\mathcal{H}$ prin serii de funcții Φ_k.* Fie $\Phi(P)$ o funcție oarecare din $\mathcal{H}$ și numerele corespunzătoare

$$a_m = \int_{R^n} \Phi(P)\, \overline{\Phi}_m(P)\, dP \qquad m = 1,\ 2, \ldots \tag{9}$$

Suma $S_n(P) = \sum_j a_j \Phi_j(P)$ converge în medie către $\Phi(P)$ în înțelesul că

$$\lim_{N \to \infty} \int_{R^n} |S_N(P) - \Phi(P)|^2 dP = 0.$$

In particular, dacă $\Phi(P)$ este o funcție ortogonală tuturor funcțiilor proprii $\Phi_k(P)$, suma corespunzătoare S_N este nulă oricare ar fi N. Rezultă

$$\int_{R^n} |\Phi(P)|^2 \, dP = 0,$$

ceea ce arată că $\Phi(P)$ *este nulă: sistemul $\Phi_k(P)$ este complet.*

Se verifică imediat că

$$\int_{R^n} \Phi(P)\,\overline{S_N(P)}\,dP = \sum_1^N{}_m\,|a_m|^2.$$

Cînd $N\to\infty$, obţinem egalitatea caracteristică completitudinei sistemului

$$\int_{R^n} |\Phi(P)|^2\,dP = \sum_{m=1,2,\ldots} |a_m|^2. \tag{10}$$

Următoarea propoziţie este foarte utilă în aplicaţii:

Dacă operatorul T are spectrul discret $\{\lambda_j\}$ cu funcţiile proprii respective $\varphi_j(P)$, spectrul valorilor proprii ale operatorului T^k este $\{\lambda_j^k\}$, iar funcţiile proprii sînt de asemenea $\varphi_j(P)$.

Vom demonstra propoziţia în cazul $k=2$. In adevăr, din $T\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$ rezultă

$$T^2\varphi_j = T(T\varphi_j) = \lambda_j\,T\varphi_j = \lambda_j^2\,\varphi_j.$$

Reciproc, dacă $T^2\varphi=\lambda\varphi$ şi reprezentăm pe φ prin $\sum_{m=1,2,\ldots} a_m\varphi_m$, rezultă

$$\sum_{m=1,2,\ldots} a_m\lambda_m^2\varphi_m = \lambda \sum_{m=1,2,\ldots} a_m\varphi_m.$$

Aşadar, $\lambda=\lambda_m^2$ şi $\varphi=\varphi_m$ pentru $m=1, 2,\ldots$

§ 2. Evenimente. Probabilitate. Legi de repartiţie

1. *Un spaţiu de evenimente şi probabilitate.* Un prim cîmp de evenimente este realizat de mulţimile măsurabile din spaţiul R^n al parametrilor de poziţie $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ai sistemului.

Probabilitatea unei mulţimi măsurabile A din acest cîmp poate fi dată de integrala

$$P(A) = \int_A \omega(P)\,\overline{\omega}(P)\,dP, \tag{1}$$

unde funcţia $\omega(P)$ se obţine prin normare pornind de la o funcţie aparţinînd spaţiului $\mathcal{H}$ definit în § 1.

2. *Mărimile asociate cîmpului de evenimente.* In mecanica cuantică se realizează o disociere completă între mărime şi valoare, în sensul că unei mărimi îi corespunde un spectru de valori, fiecare cu o probabilitate determinată, în acelaşi mod în care într-un spaţiu Hilbert unui operator îi corespunde un spectru de valori proprii care sînt numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

Vom conveni deci că fiecare mărime T a sistemului cu n grade de libertate considerat corespunde unui operator cu același nume T. Dacă acest operator este un multiplicator $f(P)$, atunci ecuația

$$f(P)\varphi(P)=\lambda\varphi(P)$$

ne dă pentru operator valoarea $f(P)$. Valoarea medie a acestei mărimi este, conform definiției obișnuite, pentru funcția de stare $\omega(P)$,

$$M[f]=\int_{R^n} f(P)\,\omega(P)\,\overline{\omega}(P)\,dP, \tag{2}$$

dacă această integrală există.

Pentru mărimea reprezentată de operatorul T vom avea, extinzînd această definiție,

$$M_\omega[T]=\int_{R^n} T\omega(P)\,\overline{\omega}(P)\,dP. \tag{3}$$

In particular, dacă funcția de stare este una dintre funcțiile proprii $\omega_j(P)$ ale operatorului, vom avea:

$$M_{\omega_j}[T]=\int_{R^n} T\omega_j(P)\,\overline{\omega}_j(P)\,dP=\lambda_j\int_{R^n}\omega_j(P)\,\overline{\omega}_j(P)\,dP=\lambda_j,$$

egalitate care justifică complet accepția de mărime pe care am dat-o operatorului P.

Dacă ne raportăm la o funcție de stare normată, însă oarecare,

$$\omega(P)=\sum_{j=1,2,\ldots} a_j\,\omega_j(P),$$

atunci

$$T\omega(P)=\sum_j a_j\lambda_j\,\omega_j(P).$$

Ținînd seama de ortogonalitatea funcțiilor proprii $\omega_j(P)$, vom avea, aplicînd (3):

$$M_\omega(T)=\sum_{m=1,2,\ldots}|a_m^2|\lambda_m. \tag{4}$$

Funcția $\omega(P)$ fiind normată, rezultă din (1) că, punînd

$$p_m^{(\omega)}=|a_m|^2,$$

avem:

$$\sum_{m=1,2,\ldots} p_m^{(\omega)}=1,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar (4) ia forma obișnuită a unei valori medii:

$$M_\omega[T] = \sum p_m^{(\omega)} \lambda_m .$$

Dacă urmărim adunarea după valorile crescătoare ale valorilor proprii λ_m, seria din membrul al doilea se prezintă, în general sub forma

$$M_\omega[T] = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m p_m^{(\omega)} \lambda_m$$

Probabilitatea, pe care o vom scrie

$$P_\omega[\lambda' \leq T < \lambda''],$$

se va putea defini în modul următor:

Asociem mărimii T o altă mărime θ, astfel încît:

$$\theta = \begin{cases} 1 \text{ cînd } \lambda' \leq T < \lambda'', \\ 0 \text{ cînd } T \text{ este exterior intervalului de sus.} \end{cases}$$

Vom avea atunci

$$P_\omega[\lambda' \leq T < \lambda''] = M_\omega(\theta) = \sum_{\lambda' \leq \lambda_m < \lambda''} p_m^{(\omega)},$$

egalitate care justifică complet semnificația de probabilitate pe care am atribuit-o valorilor $|a_m|^2$.

BIBLIOGRAFIE

J. Clark Maxwell: On the dynamical Theory of Gas, (în Opere, vol. I și II).

L. Boltzmann: Leçons sur la théorie des gas (traducerea franceză a operei).

J. H. Jeans: The dynamical Theorie of Gases, Londra, 1916.

W. Gibbs: Elementary Principles of Statistical mechanics, Univ. Press, Yale, 1902.

T. et *P. Ehrenfest* (expus de *E. Borel*): Mécanique statistique, Encyclopédie des Sciences mathématiques, t. 4, vol. 1. Paris, 1913.

P. Hertz: Über die statistiche Mechanik, Math. Ann., t. 74, 1913.

E. Borel: Introduction géométrique à quelques théories physiques, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

E. Borel: Mécanique statistique classique, Gauthier Villars.

А. Хинчин: Математические основания статистической механики, Москва–Ленинград, 1943.

L. Brillouin: Les statistiques quantiques, Paris, 1930.

R. H. Fowler: Statistical Mechanics, Univ. Press, Cambridge, 1936.

Scanned with OKEN Scanner

L. de Broglie: La mécanique ondulatorie des systèmes de corpuscules, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

J. von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.

F. Perrin: La Mécanique Statistique quantique, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

G. Castelnuovo: Calcolo delle Probabilità, Roma, 1919.

O. Onicescu: Evoluția repartiției mărimilor aditive ale mecanicii statistice, Revista Universității nr. 6-7, București, 1955.

CAPITOLUL XI

FUNCȚII ALEATORII

§ 1. Generalități despre funcțiile aleatorii

Definiții. Să numim cu F mulțimea funcțiilor măsurabile $x(\xi)$, definite pe cîmpul de evenimente $[E, \mathcal{K}]$.

Fie I o parte din mulțimea R a numerelor reale. Vom reprezenta prin $f(t, \xi)$ sau numai prin $f(t)$, uneori prin $x_t(\xi)$, *o familie de funcții* din F, cîte una pentru fiecare $t \in I$.

Familia de funcții măsurabile $f(t, \xi)$ poate fi deci considerată ca *o funcție uniformă* de t, *definită pentru* $t \in I$ *și luîndu-și valorile în* F.

Potrivit definiției vom avea, pentru fiecare $t \in I$ și orice a real,

$$A_{f,\,t,\,a} = \{\xi \mid f(t, \xi) < a\} \in \mathcal{K}.$$

Funcția măsurabilă $x(\xi)$ a cîmpului de evenimente $[E, \mathcal{K}]$ devine o *variabilă aleatorie* pe orice cîmp de probabilitate $C = [E, \mathcal{K}, P]$, obținut prin introducerea unei probabilități total aditive pe cîmpul $[E, \mathcal{K}]$, iar familia de funcții măsurabile $f(t)$ devine *funcția aleatorie* $f(t)$.

Exemplu. Se consideră un sistem de N urne U_j, conținînd fiecare bile albe și negre, ordonate după indicele crescător $j = 1, 2, \ldots, N$. Dacă urna U_j conține k_j bile albe și K_j bile negre, vom pune

$$p_j = \frac{k_j}{k_j + K_j}; \quad q_j = \frac{K_j}{k_j + K_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Constituim un cîmp de probabilitate în modul următor:

Evenimentele elementare sînt şiruri finite de bile albe (a) sau negre (b), ordonate după indicele urnei corespunzătoare în felul următor:

$$a_1, b_2, b_3, a_4, \ldots, a_N.$$

Probabilitatea fiecăruia dintre aceste evenimente elementare este produsul probabilităţilor bilelor de culoarea corespunzătoare. Astfel, probabilitatea evenimentului elementar de mai sus este

$$p_1 q_2 q_3 p_4 \ldots p_N.$$

Se verifică imediat că suma acestor probabilităţi este egală cu 1. Să considerăm acum următoarea funcţie aleatorie:

$$\underset{t \in I=(1,2,\ldots,N)}{f(t, \xi)} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \xi = \ldots a_t \ldots, \\ 0 \text{ dacă } \xi = \ldots b_t \ldots, \end{cases}$$

unde punctele ţin loc de bile albe sau negre în toate modurile posibile.

Pentru $t=j$, funcţia $f(j, \xi)$ este o variabilă aleatorie care ia valoarea 1 cu probabilitatea p_j şi valoarea 0 cu probabilitatea q_j. Această variabilă corespunde unei experienţe: extracţia din urna U_j fără nici un raport cu extracţiile din celelalte urne.

Diferitele variabile sînt independente între ele.

§ 2. Continuitate şi derivabilitate stochastică

1. *Condiţii generale pentru definirea continuităţii derivatei.* Vom presupune că $f(t, \xi)$ este o funcţie aleatorie, determinată într-un cîmp de probabilitate constant $\{E, \mathcal{K}, P\}$. Există deci, în acest cîmp, o lege de probabilitate absolută pentru fiecare dintre variabilele aleatorii ale familiei $f(t, \xi)$, $t \in I$, după cum există şi probabilităţi condiţionate. O dată cu $f(t)$ şi $f(t_0)$, diferenţa $f(t)-f(t_0)$ este o variabilă aleatorie definită pe cîmp pentru fiecare t, căruia îi corespunde de asemenea o lege de probabilitate absolută pentru fiecare t. In aceste condiţii, putem defini continuitatea stochastică în tot atîtea moduri cîte sînt modurile de convergenţă.

Continuitatea în probabilitate. Funcţia $f(t)$ este continuă în probabilitate în punctul t_0, dacă $f(t)-f(t_0)$ tinde, în probabilitate, către zero cînd $t \to t_0$.

Continuitatea m. p. (în medie pătratică). Funcţia aleatorie $f(t)$ este continuă în medie pătratică în punctul t_0 dacă

$$M[|f(t)-f(t_0)|^2] \to 0 \qquad (1)$$

cînd $t \to t_0$.

2. *Proprietăţi ale continuităţii m. p.* Să observăm, mai întîi, că, dacă $x(\xi)$ este o variabilă aleatorie, avînd valoarea medie

finită $M[x]$ și variația finită $M[x'^2]=M[(x-M[x])^2]$, avem relația

$$M[x'^2]=M[x^2]-[M[x]]^2,$$

deci

$$M[x^2]=M[x'^2]+[M[x]]^2. \tag{2}$$

Prin urmare, dacă punem $x_t=f(t)$, $x'_t=f'(t)=f(t)-M[f(t)]$ rezultă din (2) următoarele propoziții:

P_1. *Dacă $f(t)$ este continuă m. p. în t_0, atunci abaterea $f'(t)=f(t)-M[f]$ este continuă m. p. în același punct t_0.*

P_2. *Dacă $f(t)$ este continuă m. p. în t_0, atunci $M[f(t)]$ este continuă în punctul t_0.*

3. *Conexiunea și coeficientul de conexiune.* Conexiunea funcției aleatorii reale $f(t)$ este, pentru fiecare sistem de două momente t_1, t_2 $(t_1<t_2)$, corelația între variabilele aleatorii $f(t_1)$ și $f(t_2)$:

$$\gamma(t_1, t_2)=M[f'(t_1)f'(t_2)],$$

iar *coeficientul de conexiune* este coeficientul de corelație respectiv:

$$\rho(t_1, t_2)=\frac{M[f'(t_1)f'(t_2)]}{\mu_{t_1}\mu_{t_2}}, \tag{3}$$

unde $\mu_t^2=M[f'^2(t)]$, cu ipoteza că *aceste valori medii există* pentru t aparținînd unui interval I.

Să mai observăm că, potrivit *teoremei lui Schwartz*,

$$|M[f'(t_1)f'(t_2)]|\leq\mu_{t_1}\mu_{t_2} \tag{4}$$

și, prin urmare, dacă t_1, t_2 aparțin lui I, avem:

$$|M[f'(t_1)f'(t_2)]|<\infty.$$

In aceste condiții,

$$|\rho(t_1, t_2)|\leq 1. \tag{5}$$

Să observăm că

$$M[(f'(t)-f'(t_0))^2]=M[(f'(t))^2]+(f'(t_0))^2-2f'(t)f'(t_0)],$$

deci

$$M[(f'(t)-f'(t_0))^2]=\mu_t^2+\mu_{t_0}^2-2\mu_t\mu_{t_0}\rho(t, t_0);$$

sau încă

$$M[(f'(t)-f'(t_0))^2]=(\mu_t-\mu_{t_0})^2+2\mu_t\mu_{t_0}[1-\rho(t, t_0)]. \tag{6}$$

Potrivit propoziției P_2, primul membru al acestei egalități tinde către zero cînd $t \to t_0$. Cum ambii termeni din membrul al doilea sînt pozitivi, rezultă propozițiile:

P_3. *Dacă $f(t)$ este continuă m. p. în punctul t_0, funcția μ_t este continuă în t_0.*

P_4. *Dacă $f(t)$ este continuă m. p. în punctul t_0, coeficientul de conexiune $\rho(t, t_0)$ este continuu în punctul $t=t_0$.*

Această din urmă propoziție corespunde faptului că

$$\rho(t_0; t) \to \rho(t_0, t_0) = 1,$$

cînd $t=t_0$.

Teoremă. Dacă $f(t)$ este continuă m. p., este continuă în probabilitate.

Această teoremă rezultă din următoarea propoziție: Dacă $x_t(\xi)$ converge către $x_{t_0}(\xi)$ în medie pătratică, ea converge către aceeași limită în probabilitate.

Implicația inversă nu este valabilă. Prin urmare, clasa funcțiilor aleatorii continue în probabilitate conține clasa funcțiilor aleatorii continue m. p.

4. *Continuitatea funcțiilor aleatorii complexe.* Funcția $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ este o funcție aleatorie complexă dacă fiecare dintre funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt funcții aleatorii în sensul considerat pînă aici. Este evident că $f(t)$ este continuă m. p. dacă și numai dacă $f_1(t)$ și $f_2(t)$ sînt continue m. p. Această condiție reiese și din următoarea:

Definiție. $f(t)$ este continuă m. p. în punctul t_0 dacă

$$M[(f(t) - f(t_0))(\overline{f(t)} - \overline{f(t_0)})] \to 0 \tag{7}$$

cînd $t \to t_0$.

Dacă punem, în cazul funcțiilor aleatorii complexe,

$$\mu^2(t) = M[f'(t)\,\overline{f'(t)}], \tag{8}$$

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f'(t_1)\,\overline{f'(t_2)}], \tag{9}$$

vom avea:

$$\overline{\gamma}(t_1, t_2) = M[\overline{f'(t_1)}\, f'(t_2)] = \gamma(t_2, t_1), \tag{10}$$

iar *lema lui Schwartz* ne dă

$$|\gamma(t_1, t_2)| \leq \mu_{t_1} \mu_{t_2}.$$

Dacă punem

$$\gamma(t_1, t_2) = \mu_{t_1} \mu_{t_2} \rho(t_1, t_2),$$

vom avea relaţia analogă cu (10)

$$\overline{\rho}(t_1, t_2)=\rho(t_2, t_1),$$

iar (6) devine în acest caz

$$M[(f'(t)-f'(t_0))(\overline{f'(t)}-\overline{f'(t_0)})]=$$
$$=(\mu_t-\mu_{t_0})^2+2\mu_t\mu_{t_0}[1-R\rho(t_0, t)], \qquad (11)$$

unde

$$R\rho(t_0, t)=\frac{1}{2}[\rho(t_0, t)+\bar{\rho}(t_0, t)].$$

Deci şi în acest caz continuitatea funcţiei aleatorii într-un punct atrage continuitatea valorii sale *medii*, *dispersiei* şi a părţii reale a *conexiunii*.

5. O întărire a rezultatelor precedente asupra legăturii dintre continuitatea funcţiei aleatorii $f(t)$ într-un punct sau într-un interval şi continuitatea conexiunii se obţine folosind următoarea propoziţie auxiliară:

P_5. Dacă variabilele aleatorii x_t şi y_t converg m. p. respectiv către x_{t_0} şi y_{t_0} cînd $t\to t_0$, atunci avem şi

$$M[x_t y_t]\to M[x_{t_0} y_{t_0}]. \qquad (12)$$

In adevăr, avem întîi identitatea

$$x_t y_t-x_{t_0} y_{t_0}=(x_t-x_{t_0})(y_t-y_{t_0})+x_{t_0}(y_t-y_{t_0})+y_{t_0}(x_t-x_{t_0}),$$

observînd că, în baza inegalităţii lui Schwartz,

$$|M[(x_t-x_{t_0})(y_t-y_{t_0})]|\leq\{M[(x_t-x_{t_0})^2]M[y_t-y_{t_0}]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|M[(x_t-x_{t_0})y_{t_0}]|\leq\{M[y_{t_0}^2]M[(x_t-x_{t_0})^2]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|M[(y_t-y_{t_0})x_{t_0}]|\leq\{M[x_{t_0}^2]M[(y_t-y_{t_0})^2]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ţinînd seama şi de ipoteze rezultă (12).

Vom putea acum enunţa propoziţia importantă:

P_6. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\lim f_\alpha(t)=f(t)$ cînd $\alpha\to 0$ este ca $\lim_{\alpha,\beta\to 0} M[f_\alpha(t')\overline{f_\beta(t'')}]$ să existe şi să fie unică. Vom avea atunci

$$\gamma(t', t'')=\lim_{\alpha\to 0} M[f_\alpha(t')\overline{f_\alpha(t'')}].$$

Condiția este necesară pentru că, în virtutea propoziției P_5,

$$M[f_\alpha(t'')\overline{f_\beta(t'')}] = M[f(t')f(t'')].$$

Condiția este și suficientă, pentru că

$$M[(f_\alpha(t)-f_\beta(t))^2] = M[(f_\alpha(t))^2]+M[(f_\beta(t))^2]-2M[f_\alpha(t)f_\beta(t)],$$

deci

$$M[(f_\alpha(t)-f_\beta(t))^2] \to 0.$$

P_5'. *Condiția necesară și suficientă pentru continuitatea m. p. a funcției aleatorii $f(t)$ în punctul t_0 este existența limitei*

$$\gamma(t_0, t_0) = \lim_{t'\to t_0,\ t''\to t_0} \gamma(t', t''), \tag{13}$$

unde am notat

$$C(t', t'') = M[f(t')f(t'')]. \tag{14}$$

Propoziția P_5 arată că existența limitei din (13) este necesară. Suficiența condiției rezultă din următoarea expresie a ei:

$$\lim_{t'\to t_0,\ t''\to t_0} M[f(t_0)f(t_0)-f(t')f(t'')] \to 0. \tag{15}$$

Pentru $t', t'' \to t_0$, această convergență devine continuitatea momentului de ordinul al doilea:

$$M[f^2(t)] \to M[f^2(t_0)].$$

În același timp,

$$M[|f(t)-f(t_0)|^2] = M[f(t)^2] + M[f(t_0)^2]-2M[f(t)f(t_0)].$$

Potrivit condiției (14) și a consecinței sale (15), limita membrului al doilea este zero, de unde continuitatea m. p. a funcției.

Vom demonstra următoarea

Teoremă. Dacă $f(t)$ este o funcție aleatorie continuă, ordinul infinitezimal al expresiei $1-\rho(t_1, t_2)$ față de t_2-t_1 este cel mult doi.

În adevăr, să considerăm trei variabile aleatorii $x_1 = f(t_1)$, $x_2 = f(t_2)$, $x_3 = f(t_3)$ cu $t_1 < t_2 < t_3$.

Să considerăm valoarea medie

$$(\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3')^2 = \alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2 + \alpha_3^2\mu_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2\mu_1\mu_2 r_{12} +$$

$$+ 2\alpha_2\alpha_3\mu_2\mu_3 r_{23} + 2\alpha_3\alpha_1\mu_3\mu_1 r_{31},$$

și să notăm

$$\beta_1 = \alpha_1\mu_1, \quad \beta_2 = \alpha_2\mu_2, \quad \beta_3 = \alpha_3\mu_3;$$

Scanned with OKEN Scanner

expresia precedentă devine

$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+2\beta_1\beta_2 r_{12}+2\beta_2\beta_3 r_{23}+2\beta_3\beta_1 r_{31}\geq 0,$$

caracteristică unui triunghi sferic, în care β_1, β_2, β_3 sînt laturile, iar r_{12}, r_{23}, r_{31} sînt cosinusurile unghiurilor:

$$r_{12}=\cos\varphi_{12},\quad r_{23}=\cos\varphi_{23},\quad r_{31}=\cos\varphi_{31}.$$

Insă,

$$1-r_{12}=\frac{1}{2}\varphi_{12}^2,\quad 1-r_{23}=\frac{1}{2}\varphi_{23}^2,\quad 1-r_{31}=\frac{1}{2}\varphi_{31}^2.$$

Dacă

$$1-r_{12}(t_1, t_2)=K(t_2-t_1)^{\alpha},$$

vom avea, pe baza relaţiei $\varphi_{12}\leq\varphi_{23}+\varphi_{31}$:

$$(t_2-t_1)^{\frac{\alpha}{2}}\leq(t_3-t_2)^{\frac{\alpha}{2}}+(t_1-t_3)^{\frac{\alpha}{2}},$$

care este egalitate în cazul $\alpha=2$ şi verificată numai dacă $0\leq\alpha\leq 2$. Deci, teorema este demonstrată. Ea ne indică varietatea tipurilor de funcţii aleatorii continue în corespondenţă cu ordinul infinitezimal al diferenţei $1-\rho(t_1, t_2)$ în raport cu t_2-t_1. Acest ordin este doi în cazul în care există o derivată m. p., aşa cum vom vedea.

6. *Derivata m. p. a funcţiei aleatorii.*

Definiţie. $\dot{f}(t)$ *este derivata m. p. în punctul* t *al funcţiei aleatorii* $f(t)$, *dacă* $\dot{f}(t)$ *este limita m. p. a raportului* $\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}$ *cînd* $\tau\to 0$.

Rezultă imediat că: *dacă* $\dot{f}(t)$ *este derivata m. p. a funcţiei aleatorii* $f(t)$, *ea este şi derivata acesteia în probabilitate.*

Pentru a găsi proprietatea corelativă a conexiunii, să observăm că, potrivit propoziţiei P_6, condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa limitei m. p. a raportului

$$g(t, \tau)=\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}$$

este existenţa limitei

$$\lim_{\tau_1\to 0,\ \tau_2\to 0} M[g(t, \tau_1)g(t, \tau_2)]=$$

$$=\lim_{\tau_1\to 0,\ \tau_2\to 0}\frac{\gamma(t+\tau_1, t+\tau_2)-\gamma(t+\tau_1, t)-\gamma(t, t+\tau_2)+\gamma(t, t)}{\tau_1\tau_2}. \tag{16}$$

Teorema I. Condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa derivatei m. p. a funcţiei aleatorii $f(t)$ *în* t este existenţa în

punctul t a derivatei mixte de ordinul al doilea a produsului scalar

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f(t_1) f(t_2)].$$

In particular, dacă facem în (16) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, există limita

$$\lim_{\tau \to 0} M\left[\left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}\right)^2\right]. \tag{17}$$

Prin urmare, există, în același timp, și limita

$$M[\dot{f}(t)] = \lim_{\tau \to 0} M\left[\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}\right] = \frac{dM[f(t)]}{dt},$$

ceea ce pune in evidență următoarea

Teoremă. Operațiile M *și* $\frac{d}{dt}$ *(m. p.) sînt permutabile:*

$$M\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = \frac{d}{dt} M[f(t)].$$

Pentru a demonstra următoarea propoziție:

P_7. *Dacă* $\dot{f}(t)$ *este derivata m. p. a funcției aleatorii* $f(t)$, *vom avea:*

$$\frac{d}{dt} f^2 = 2f\dot{f},$$

trebuie să arătăm că

$$M\left[\left(\frac{f^2(t+\tau) - f^2(t)}{\tau} - 2f\dot{f}\right)^2\right] \to 0$$

cînd $\tau \to 0$.

In adevăr,

$$M\left[\left(\frac{f^2(t+\tau) - f^2(t)}{\tau} - 2f\dot{f}\right)^2\right] = M\left[[f(t+\tau) + f(t))\left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} - \dot{f}\right) + \right.$$

$$\left. + (f(t+\tau) - f(t))\dot{f}\right]^2\Big] = M\left[(f(t+\tau) + f(t))^2\left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} - \dot{f}\right)^2\right] +$$

$$+ M[(f(t+\tau) - f(t))^2 \dot{f}^2] + 2M\left[(f(t+\tau) - f(t))^2\left(\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} - \dot{f}\right)\dot{f}\right].$$

Potrivit condițiilor noastre, toți termenii din membrul al doilea tind către zero cu τ, deci afirmația este verificată.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd teoremele 1 și 2, rezultă că $\frac{d}{dt} M(f^2)$ există și este egală cu

$$M\left[\frac{d}{dt} f^2\right] = 2M(f\dot{f}).$$

Sîntem acum în măsură să demonstrăm

Teorema. Pentru funcțiile aleatorii $f(t)$, care admit o derivată m. p., există

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1-\rho(t, t+\tau)}{\tau^2}.$$

In adevăr, potrivit formulei (6), avem:

$$M\left[\left(\frac{f'(t+\tau)-f'(t)}{\tau}\right)^2\right] = \left(\frac{\mu_{t+\tau}-\mu_t}{\tau}\right)^2 + 2\mu_{t+\tau}\mu_t \frac{1-\rho(t, t+\tau)}{\tau^2}.$$

Din (17) și (19) rezultă că membrul întîi are o limită cînd $\tau \to 0$, din P_7 rezultă că primul termen din membrul al doilea are de asemenea o limită, $\mu_{t+\tau} \to \mu_t$ cînd $\tau \to 0$ și, cum $\mu_t^2 \neq 0$, rezultă că $\frac{1-\rho(t, t+\tau)}{\tau^2}$ are o limită finită cînd $\tau \to 0$.

7. *Integrala stochastică.* Putem concepe această integrală în mai multe feluri. Funcția aleatorie este pentru fiecare ξ dat o funcție de t. Dacă această funcție este integrabilă oricare ar fi ξ într-un interval t, integrala

$$x(\xi) = \int_a^b f(s, \xi)\, ds \qquad (18)$$

este o variabilă aleatorie, limită a unui șir de variabile aleatorii obținute prin sumele parțiale care conduc la valoarea integralei.

Dacă limita sumelor intermediare există în medie pătratică, sau în probabilitate, avem o *integrală m. p.* sau *în probabilitate.*

Teorema următoare ne indică un cîmp de ajuns de larg pentru integrale de funcții aleatorii.

Teoremă. Dacă $f(t)$ este continuă și dacă

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds, \qquad (19)$$

vom avea, notînd cu $\dot{F}(t)$ derivata m. p. a funcției aleatorii $F(t)$,

$$f(t) = \dot{F}(t). \qquad (20)$$

Pentru a demonstra aceasta, să considerăm cîtul

$$\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f(s)\,ds$$

şi identitatea

$$f(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f(t)\,ds;$$

rezultă

$$\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}[f(s)-f(t)]\,ds.$$

Prin urmare,

$$\left[\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)\right]^2=\frac{1}{\tau^2}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau}[(f(u)-f(t))]\,[f(v)-f(t)]\,du\,dv.$$

Aplicînd valoarea medie şi permutînd M cu integrala, găsim:

$$M\left[\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)\right]^2=\frac{1}{\tau^2}\int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau}M[(f(u)-f(t))\,(f(v)-f(t))]\,du\,dv.$$

Deoarece

$$|M[(f(u)-f(t))\,(f(v)-f(t))]|\leq\sqrt{M[(f(u)-f(t))^2\,M[(f(v)-f(t))^2]}$$

şi cum $f(t)$ este continuă m. p., deci fiind dat $\varepsilon>0$, există η suficient de mic, astfel că, dacă $\tau<\eta$ deci $|u-t|\leq\tau<\eta$, să avem:

$$M[(f(u)-f(t))^2]\leq\varepsilon;$$

rezultă

$$M\left[\left(\frac{F(t+\tau)-F(t)}{\tau}-f(t)\right)^2\right]<\varepsilon,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Dacă punem

$$m(t)=M[f(t)],$$

vom avea, evident,

$$M[x(\xi)]=\int_a^b m(s)\,ds. \qquad (21)$$

Integrabilitatea valorii medii este deci o condiţie necesară a integrabilităţii funcţiei aleatorii $f(t)$.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala m. p. (18) să existe este existența integralei

$$\int_a^b \int_a^b C(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Lăsăm cititorului demonstrația acestei teoreme, care se obține aplicînd sumelor intermediare care conduc la integrală cu limită m. p. propoziția P_4.

Proprietăți spectrale ale produsului intern al unei funcții aleatorii. Numim produs scalar intern al funcției aleatorii complexe $f(t)$ funcția complexă

$$\gamma(t_1, t_2) = M[f(t_1)\overline{f(t_2)}].$$

Dacă $M[f(t)] = 0$, $C(t_1, t_2)$ este evident identică cu conexiunea.

Teoremă. Produsele interne ale unei familii aleatorii sînt funcții de două variabile reale de tip pozitiv.

In adevăr, n fiind un întreg arbitrar $(n = 1, 2, \ldots)$, iar $t_1, t_2, \ldots, t_n$ un sistem de n valori ale lui t și $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un sistem de numere complexe, oarecare, vom avea:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \bar{a}_k \gamma(t_j, t_k) = \sum_{j,k=1}^{n} M[a_j \bar{a}_k f(t_j) f(t_k)] =$$

$$= M[(\sum_j a_j f(t_j))(\overline{\sum_k a_k f(t_k)})] = M[|\sum a_j f(t_j)|^2] \geq 0. \qquad (22)$$

Reprezentarea spectrală a unei funcții aleatorii. Vom examina mai întîi sensul unei integrale Stieltjes generalizate

$$\int_a^b h(u)\, d\omega(u), \qquad (23)$$

unde $h(u)$ este o funcție obișnuită de u și mărginită în intervalul $[a, b]$, iar $\omega(u)$ este o funcție aleatorie.

Această integrală este limita m. p. a sumelor de forma

$$S_n = \sum_j h(u_j^{(n)})[\omega(u_{j+1}^{(n)}) - \omega(u_j^{(n)})]$$

pentru o diviziune oarecare Δ_n a intervalului $[a, b]$.

Pentru ca această limită să existe m. p., este necesar și suficient, potrivit teoremei P_6, să existe

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} M[S_n S_m].$$

Insă

$$M[S_n S_m] = \sum_{j,l} h(u_j^n)\, h(u_l^m)\, [\omega(u_{j+1}^n)\, \overline{\omega}(u_{l+1}^m) - \omega(u_{j+1}^n)\, \overline{\omega}(u_l^n) - \omega(u_j^n)\, \overline{\omega}(u_{l+1}^m) + \omega(u_j^n)\, \omega(u_j^m)].$$

Prin urmare, pentru existenţa integralei (23) este necesar şi suficient ca valorile

$$M[S_n S_m] = \sum_{j,l} h(u_j^n)\, \overline{h}(u_l^m)\, [\Omega(u_{j+1}^n, u_{l+1}^n) - \Omega(u_{j+1}^n, u_l^m) - \Omega(u_j^n, u_{l+1}^m) + \Omega(u_j^n, u_j^m)]$$

să aibă o limită determinată. Am notat

$$\Omega(u_1, u_2) = M[\omega(u_1)\, \overline{\omega}(u_2)].$$

Această limită este

$$\int_a^b \int_a^b h(u_1)\, \overline{h(u_2)}\, d\Omega(u_1, u_2).$$

Ea este realizată în ipoteza, pe care am făcut-o, că $|h(u)|$ este limitată în (a, b) şi că $C(u_1, u_2)$ este cu variaţie limitată.

Vom presupune că $C(u_1, u_2)$ este cu variaţie limitată pe întreg planul real şi vom lua $h(u) = e^{iut}$, u şi t fiind reale. In acest caz, integrala

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut}\, d\omega(u) \tag{24}$$

există pentru orice t real şi este continuă m. p.

Să considerăm funcţiile aleatorii care au această reprezentare spectrală numită şi *armonică*.

Potrivit calculului precedent, vom avea

$$\gamma(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1 u_1 - t_2 u_2)}\, d\Omega(u_1, u_2). \tag{25}$$

Se poate demonstra şi teorema inversă:

Dacă produsul scalar $C(t_1, t_2)$ al funcţiei aleatorii $f(t)$ este susceptibil de reprezentarea (25), unde $\Omega(u_1, u_2)$ este o funcţie de tip pozitiv cu variaţie limitată, atunci $f(t)$ poate fi reprezentată sub forma armonică (24).

Aceste reprezentări armonice pot fi transpuse în reprezentări spectrale.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm funcţia aleatorie continuă $f(t)$. Dacă posedăm pentru $\gamma(t_1, t_2)$ reprezentarea spectrală uniform convergentă

$$\gamma(t_1, t_2) = \sum |\lambda_j|^2 \varphi_j(t_1)\,\overline{\varphi}_j(t_2), \tag{26}$$

unde $\varphi_j(t)$ formează un sistem ortogonal şi normal cu proprietatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t_1, t_2)\,\overline{\varphi}_j(t_2)\,dt_2 = |\lambda_j|^2 \varphi_j(t_1) \qquad (j=1, 2, \ldots), \tag{27}$$

considerăm variabilele aleatorii

$$f_j = \int_a^b f(t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (j=1, 2, \ldots) \tag{28}$$

a căror existenţă pentru a şi b este asigurată de continuitatea funcţiilor $\varphi_j(t)$ şi de continuitatea m. p. a funcţiei $f(t)$. Vom avea, evident:

$$M[f_j \overline{f}_l] = M \int_a^b \int_a^b f(t_1)\,\overline{f(t_2)}\,\varphi_j(t_1)\,\overline{\varphi_l(t_2)}\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \int_a^b \varphi_j(t_1)\,dt_1 \int_a^b \gamma(t_1, t_2)\,\overline{\varphi_l(t_2)}\,dt_2.$$

Deci, ţinînd seama de (27),

$$M[f_j \overline{f}_l] = |\lambda_l|^2 \int_a^b \varphi_j(t_1)\,\overline{\varphi}_l(t_1)\,dt_1 = \delta_{jl}|\lambda_l|^2. \tag{29}$$

In acelaşi timp,

$$M[f(t)\,\overline{f}_l] = M\left[\int_a^b f(t)\,f(t_1)\,\overline{\varphi}_l(t_1)\,dt_1\right] =$$

$$= \int_a^b \gamma(t, t_1)\,\overline{\varphi_l(t_1)}\,dt_1 = |\lambda_l|^2 \varphi_l(t). \tag{30}$$

Dacă punem

$$f_{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\,f_j,$$

Scanned with OKEN Scanner

vom avea:

$$|f(t)-f_{(n)}(t)|^2=|f(t)|^2-\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi_j(t)}f(t)\bar{f}_j-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\overline{f(t)}f_j+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n}f_j\bar{f}_k\varphi_j(t)\overline{\varphi_k(t)}.$$

Prin urmare, potrivit cu (30) și (29),

$$M[|f(t)-f_{(n)}(t)|^2]=M[|f(t)|^2]-\sum_j|\lambda_j|^2\overline{\varphi_j(t)}\varphi_j(t)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\overline{\varphi_j(t)}\varphi_j(t)+C(t,t).$$

Dacă ținem seama de (26), rezultă că

$$M[|f(t)-f_{(n)}(t)|^2]$$

tinde uniform către zero cînd n tinde către infinit, $t\in[a,\ b]$, prin urmare

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}f_{(n)}(t)$$

în medie pătratică, ceea ce îngăduie să scriem

$$f(t)=\sum_{j=1}^{\infty}f_j\varphi_j(t). \tag{31}$$

Acest rezultat parțial, pentru cazul spectrului discontinuu (27), ne arată că analiza spectrală a funcției aleatorii $f(t)$ se efectuează cu ajutorul analizei spectrale a funcției $C(t_1,\ t_2)$, așa cum vom vedea, de aproape, în cazul particular al proceselor staționare.

§ 3. Procese staționare

1. *Generalități. Definiții.* Fie $f(t)$ o funcție aleatorie definită pe cîmpul de probabilitate $\{E,\ \mathcal{K},\ P\}$, n un întreg oarecare, $t_1,\ t_2,\ldots,t_n$ n numere succesive și legea de probabilitate

$$P\{a_1\leqslant f(t_1)<b_1,\ a_2\leqslant f(t_2)<b_2,\ldots,a_n\leqslant f(t_n)<b_n\}=$$

$$=P_{d_1,d_2,\ldots,d_n}(t_1,\ t_2,\ldots,t_n)$$

a succesiunii de variabile aleatorii $f(t_1),\ f(t_2),\ldots,f(t_n)$, unde am notat cu d_j intervalul $(a_j,\ b_j)$.

Procesul aleator reprezentat de $f(t)$ se numește *staționar*, dacă

$$P_{d_1 d_2, \ldots, d_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = P_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(t_1+u, t_2+u, \ldots, t_n+u), \quad (1)$$

oricare ar fi u, oricare ar fi n, sistemul $t_1, t_2, \ldots t_n$ și intervalele $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

3. *Conexiunea și dispersia.* Vom presupune că procesul are dispersie finită și deci, potrivit proprietății fundamentale

$$M[f^2(t)] = M[f^2(0)] = \sigma^2,$$

există în același timp

$$M[f(t)] = M[f(0)] = m$$

și

$$M[f(t_1)\, f(t_2)] = M[f(0)\, f(t_2 - t_1)].$$

Vom înlocui funcția $f(t)$ cu redusa ei $\frac{f(t)-m}{\sigma^2}$, pe care o vom denumi din nou $f(t)$, ceea ce dă

$$M[f^2(t)] = 1, \quad M[f(t)] = 0. \quad (2)$$

In acest caz,

$$\rho(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) = M[f(0)\, f(t_2 - t_1)] = \rho(0, t_2 - t_1) = \rho(t_2 - t_1)$$

sau

$$\rho(u) = M[f(0)\, f(u)]. \quad (3)$$

Potrivit propoziției P_6, *procesul staționar este continuu dacă* $\rho(u)$ *este continuă și reciproc.*

Este suficent să presupunem că $\rho(u)$ este continuă în origine, deci că

$$\lim_{u \to 0} \rho(u) = \rho(0) = 1.$$

De aici rezultă continuitatea uniformă a funcției $\rho(u)$ pentru întreaga axă reală.

In adevăr,

$$\rho(u+\Delta) - \rho(u) = M[f(0)(f(u+\Delta) - f(u))].$$

Deci, folosind și lema lui Schwartz,

$$|\rho(u+\Delta) - \rho(u)| \leq \sqrt{M[f^2(0)]\, M[(f(u+\Delta) - f(u))^2]}$$

și ținînd seama de (2) și (3), obținem:

$$|\rho(u+\Delta) - \rho(u)|^2 \leq 2[1 - \rho(\Delta)];$$

$\rho(\Delta)$ fiind continuă în origine, dacă se dă ε există un η astfel că

$$1-\rho(\Delta)\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2},$$

deci

$$|\rho(u+\Delta)-\rho(u)|\leqslant\varepsilon$$

dacă $\Delta<\eta$. Aceasta demonstrează afirmaţia noastră.

3. *Teorema lui Hincin.* Conexiunea $\rho(u)$ a unui proces continuu staţionar are următoarea reprezentare:

$$\rho(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos uadF(a), \tag{4}$$

unde $F(a)$ este o funcţie monotonă nedescrescătoare cu variaţie mărginită.

Demonstraţia acestei teoreme rezultă imediat din teorema 1, din paragraful precedent, care pentru cazul de faţă revine la afirmarea inegalităţii

$$\sum_{j,k=1}^{n}a_j\bar{a}_k\rho(t_k-t_j)\geq 0. \tag{5}$$

pentru orice n, orice sistem ordonat $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi orice sistem de numere complexe $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Funcţia $\rho(u)$ este deci o funcţie de tip pozitiv. Ca atare, potrivit teoremei lui *Bochner*, există o funcţie monotonă nedescrescătoare continuă la stînga şi cu variaţie mărginită $F(a)$, pentru care $\rho(u)$ să aibă reprezentarea (4) care este *unică*.

Suficienţa reprezentării (4) pentru corelaţia continuă $\rho(u)$, pentru a ne da funcţia staţionară $f(t)$, se stabileşte imediat. In adevăr, dacă $\rho(u)$ are reprezentarea (4), îi putem uşor da o formă spectrală (21), § 2, de unde se deduce cu formula (31), § 2 expresia lui $f(t)$.

Putem încă determina procesul staţionar $f(t)$ cînd se dă $\rho(t_2-t_1)$ cu reprezentarea (3) în modul următor:

Distribuţia gaussiană n dimensională a vectorului $f(t_1)$, $f(t_2), \ldots, f(t_n)$ pentru orice n şi orice sistem de numere reale $t_1<t_2<\ldots<t_n$, pentru care

$$M[f(t_j)]=0,\quad M[f^2(t_j)]=1,\quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

iar coeficientul de corelaţie internă este $\rho(t_j-t_k)$, are densitatea

$$H_n=e^{-A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{6}$$

unde $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} x^r x^s$ este o formă pătratică definită pozitivă așa cum arată (5). In adevăr, funcția caracteristică a acestei distribuții este

$$\varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{j,k} \lambda^{jk} \tau_j \tau_k}$$

unde

$$\lambda^{jj} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_j^2}\right)_{\tau=0} = 1, \quad \lambda^{jk} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_j \partial \tau_k}\right)_{\tau=0} = \rho(t_k - t_j).$$

Deoarece, după (5), dacă punem $a_k = \tau_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, avem

$$\sum \tau_j \tau_k \rho(t_k - t_j) \geq 0,$$

φ este funcția caracteristică a unei legi gaussiene. Deoarece această lege este invariantă cînd în loc de momentele $t_1, t_2, \ldots, t_n$ considerăm momentele $t_1 + u, t_2 + u, \ldots, t_n + u$, procesul este staționar. Cu aceasta, problema este efectiv rezolvată.

Spectrul funcției aleatorii $f(t)$ este dat de funcția de repartiție $F(a)$, care se mai numește și *funcție spectrală a procesului* $f(t)$.

Să presupunem, de exemplu, că

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j e^{i\alpha_j t} \tag{7}$$

unde a_j sînt variabile aleatorii reale, iar α_j numere reale crescătoare cu indicele j. Deoarece presupunem $M[f(t)] = 0$, $M[|f(t)|^2] = 1$,

$$M[a_j] = 0, \quad \sum M[a_j^2] = 1. \tag{8}$$

Vom presupune de asemenea că variabilele a_j sînt necorelate două cîte două. Rezultă că

$$M[a_j a_k] = 0. \tag{9}$$

In acest caz, $\rho(u)$ este o funcție complexă și are expresia

$$\rho(t_2 - t_2) = C(t_1, t_2) = M[f(t_1)\overline{f(t_2)}] = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 e^{i\alpha_j (t_1 - t_2)},$$

unde

$$\sigma_j^2 = M[a_j^2] \quad \text{cu} \quad \sum \sigma_j^2 = 1.$$

Procesul este, evident, continuu și staționar în sensul restrîns care corespunde faptului că $C(t_1, t_2) = \rho(t_2 - t_1)$.

Dacă seria

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j|$$

este convergentă m. p., presupunînd verificate condițiile (8) și (9) pentru $m = \infty$, găsim imediat

$$\rho(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 e^{-i a_j u}.$$

Fie acum o reprezentare m. p.

$$f(t) = \int e^{i\alpha t} d\omega(\alpha),$$

unde $\omega(\alpha)$ este o funcție aleatorie cu creșteri necorelate (generalizarea imediată a funcțiilor cu creșteri independente de care ne vom ocupa), avînd, în mod precis, proprietățile următoare:

$$M[(\omega(\alpha))^2] < \infty$$

pentru orice α real. In acest caz, momentele $M[\omega(\alpha)]$ și $M[(\omega(\beta) - \omega(\alpha))(\omega(\delta) - \omega(\gamma))]$ există. Vom presupune $M[\omega(\alpha)] = 0$ și ca o caracteristică proprie *funcțiilor aleatorii*, cu creșteri necorelate:

$$M[(\omega(\beta) - \omega(\alpha))(\omega(\delta) - \omega(\gamma))] = 0,$$

ori de cîte ori intervalele (α, β), (γ, δ) nu se acoperă cu nici o parte a lor.

Se poate arăta că această reprezentare este totdeauna posibilă și anume, într-un singur mod (teoremele lui *Cramer* și *Loeve*) și că ea îngăduie analiza spectrală completă a funcției aleatorii $f(t)$.

§ 4. Funcții aleatorii cu creșteri independente

1. *Definiție și proprietăți. O funcție aleatorie* $f(t, \xi)$ este cu *creșteri independente*, după terminologia lui *P. Levy*, dacă *pentru orice mulțime de intervale*

$$(t_j, t_j + \tau_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

fără puncte comune, variabilele

$$f(t_j+\tau_j,\ \xi)-f(t_j,\ \xi) \quad (j=1,\ 2,\ldots)$$

sînt independente în totalitatea lor.

2. *Vom examina aici numai funcțiile aleatorii omogene pentru care funcția de repartiție a creșterii*

$$f(t+\tau,\ \xi)-f(t,\ \xi)$$

este independentă de t.

Pentru această categorie de funcții avem următoarea

Teoremă. Variabilele $f(t+\tau,\ \xi)-f(t,\ \xi)$ *sînt indefinit divizibile.*

Vom demonstra această teoremă folosind proprietățile funcțiilor caracteristice ale acestor variabile.

Fie $F(a,\ \tau)$ funcția de repartiție a variabilei $f(t+\tau,\ \xi)-f(t,\ \xi)$ și

$$\varphi(x,\ \tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\,dF(a,\tau)$$

funcția caracteristică corespunzătoare.

Dacă $t_1<t_2<t_3$ sînt trei momente succesive, funcțiile de repartiție ale variabilelor $f(t_2,\ \xi)-f(t_1,\ \xi)$ și $f(t_3,\ \xi)-f(t_2,\ \xi)$ sînt, respectiv, $F(a,\ t_2-t_1)$ și $F(a,\ t_3-t_2)$, iar funcțiile caracteristice sînt $\varphi(x,\ t_2-t_1)$, $\varphi(x,\ t_3-t_2)$. Funcția caracteristică a sumei $f(t_3,\ \xi)-f(t_1,\ \xi)$ celor două variabile independente este

$$\varphi(x,\ t_3-t_1)=\varphi(x,\ t_2-t_1)\,\varphi(x,\ t_3-t_2). \tag{1}$$

Dacă luăm $n+1$ valori echidistante, $t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}$, cu

$$t_{j+1}-t_j=\tau,\quad j=1,\ 2,\ldots,n,$$

vom avea:

$$\varphi(x,\ n\tau)=[\varphi(x,\ \tau)]^n.$$

sau încă, punînd $n\tau=\theta$,

$$\varphi(x,\ \theta)=\left[\varphi\left(x,\ \frac{\theta}{n}\right)\right]^n \tag{2}$$

pentru orice n.

Egalitatea (2) este proprie funcțiilor caracteristice ale variabilelor indefinit divizibile. Această egalitate este încă echivalentă cu

$$\varphi(x,\ r)=[\varphi(x,\ 1)]^r \tag{3}$$

pentru orice $\tau>0$.

Legea de repartiție a oricărei diferențe este deci determinată o dată cu legea de repartiție a variabilei $f(1, \xi)-f(0, \xi)$. Avem:

$$\ln \varphi(x, 1)=i\alpha x-\frac{1}{2}\beta^2x^2+\int\left[e^{ixs}-1-\frac{xs}{1+s^2}\right]\frac{1+s^2}{s^2}\,dG(s), \tag{4}$$

$G(s)$ fiind o funcție nedescrescătoare cu variație limitată. Pentru a ajunge la o formulă asemănătoare, dată de Cramer, vom proceda în felul următor:

Presupunem

$$\overline{f(t, \xi)}=0, \quad f(0, \xi)=0 \tag{5}$$

și, de asemenea, că

$$M[f^2(t, \xi)]<\infty. \tag{6}$$

Avem atunci

$$\left[\frac{\partial\varphi(x, \tau)}{\partial x}\right]_{x=0}=i\,\overline{(f(t+\tau, \xi)-f(t, \xi)}=0.$$

$$\left[\frac{\partial^2\varphi(x, \tau)}{\partial x^2}\right]_{x=0}=\tau\left[\varphi^{\tau-1}(x, 1)\frac{\partial^2\varphi(x, 1)}{\partial x^2}\right]_{x=0}.$$

Deci,

$$\mu^2(\tau)=-\left[\frac{\partial^2\varphi(x, \tau)}{\partial x^2}\right]_{x=0}=-\tau\left[\frac{\partial^2\varphi(x, 1)}{\partial x^2}\right]_{x=0}, \tag{7}$$

$$\mu^2(\tau)=\tau\mu^2(1)=\tau\mu^2.$$

Putem deci scrie

$$\varphi(x, \tau)=1-\theta\frac{\mu^2x^2\tau}{2}, \quad |\theta|\leq 1.$$

Prin urmare,

$$\frac{\varphi(x, \tau)-1}{\tau}=-\theta\frac{\mu^2x^2}{2}=\frac{\varphi^\tau(x)-1}{\tau} \tag{8}$$

rămîne limitată cînd $\tau\to 0$, oricare ar fi x. Deci $\varphi(x)=\varphi(x, 1)\neq 0$.

Putem atunci scrie

$$\ln\varphi(x)=\left[\frac{\partial\varphi^\tau(x)}{\partial\tau}\right]_{x=0}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(x, \tau)-1}{\tau},$$

$$\ln\varphi(x)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ixa}-1-iax)\,dF(a, \tau), \tag{9}$$

$F(a, \tau)$ fiind funcția de repartiție a variabilei $f(\tau, \xi)-f(0, \xi)=$ $=f(\tau, \xi)$.

3. Să introducem acum funcția

$$L_\tau(a)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{a} a^2 dF(a, \tau), \tag{10}$$

care este nedescrescătoare cu a și care crește de la $L_\tau(-\infty)=0$ la $L_\tau(+\infty)=\mu^2$.

Din mulțimea compactă $L_\tau(a)$ putem extrage un șir $L_{\tau_j}(a)$ cu $\tau_j \to 0$, care are o limită $L(a)$. In formula (9), care pe baza relației (10) devine

$$\ln \varphi(x)=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixa}-1-ixa}{x^2}\,dL_\tau(a),$$

facem $\tau=\tau_j$ și trecem la limită. Obținem:

$$\ln \varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixa}-1-ixa}{x^2}\,dL(a). \tag{11}$$

Dacă $L(a)$ este discontinuă în origine și $L(+0)-L(-0)=\beta^2$,

$$\ln \varphi(x)=-\frac{1}{2}\beta^2x^2+\int(e^{ixa}-1-ixa)\,dM(a)$$

cu excluderea lui zero. Vom pune

$$H(u)=\int_{-\infty}^{u} dL(u) \qquad u<0,$$

$$K(u)=\int_{u}^{+\infty} dL(u) \qquad u>0.$$

$$\ln \varphi(x)=-\frac{1}{2}\beta^2x^2+\int_{-\infty}^{-0}\frac{(e^{ixa}-1-ixa)}{a^2}\,dH(a)+$$

$$+\int_{+0}^{\infty}\frac{(e^{ixa}-1-ixa)}{a^2}\,dK(a); \tag{12}$$

$f(t, \xi)=f(t, \xi)-f(0, \xi)$ este o variabilă gaussiană dacă $\varphi(x)$ este o lege normală. Insă *legea normală se obține dacă* $H(u)=0$ *pentru* $u<0$, $K(u)=0$ pentru $u>0$.

Din (12) rezultă

$$\varphi(x)=e^{-\frac{1}{2}\beta^2x^2}\,e^{\int_{-\infty}^{-0}}\,e^{\int_{+0}^{+\infty}}.$$

Deci

$$\varphi(x)=\lim\; e^{-\frac{1}{2}\beta^2x^2}\,e^{\sum(e^{ixa_j}-1)\Delta H_j}\,e^{\sum(e^{ixa_l}-1)\Delta K_l}\,e^{i\gamma_\Delta x}$$

este suma unei variabile normale cu un număr de variabile care are discontinuităţi egale cu 1 în punctele γ_Δ şi cu variabilele Poisson care corespund de asemenea la emisiuni discontinue în intervale egale de timp.

Variabila este normală dacă toate aceste discontinuităţi sînt nule.

4. *Exemplu.* Distribuţia lui Poisson.

Notăm cu $p_k(t)$ probabilitatea ca în intervalul t de timp să se producă k evenimente. Presupunem

$$p_1(\Delta)=a\Delta+0(\Delta v),$$

$$p_l(\Delta)=0(\Delta)\quad l>1.$$

Presupunem, de asemenea, independenţa creşterilor, deci

$$p_0(t+\Delta)=p_0(t)\,p_0(\Delta).$$

$$p_n(t+\Delta)=p_n(t)\,p_0(\Delta)+p_{n-1}(t)\,p_1(\Delta)+\sum_{k=2}^{n}p_{n-k}(t)\,p_k(\Delta).$$

Deoarece

$$p_0(\Delta)+p_1(\Delta)+\ldots=1,$$

adică

$$p_0(\Delta)=1-a\Delta+0(\Delta),$$

de unde

$$p_0(t+\Delta)-p_0(t)=p_0(t)\,(p_0(\Delta)-1);$$

deci,

$$\frac{p_0(t+\Delta)-p_0(t)}{\Delta}=-ap_0(t)+\frac{0(\Delta)}{\Delta}.$$

La limită

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-ap_0(t),$$

$$p_0(t)+ke^{-at}.$$

A doua ecuaţie devine

$$p_n(t+\Delta)-p_n(t)=p_n(t)\,(p_0(\Delta)-1)+p_{n-1}(t)\,a\Delta+0(\Delta),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-ap_n(t)+ap_{n-1}(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă folosim înlocuirea

$$p_n(t)=e^{-at}q_n(t),$$

ecuația precedentă devine

$$\frac{dq_n(t)}{dt}=aq_{n-1}(t),$$

$$q_n(t)=a\int_0^t q_{n-1}(u)\,du,$$

$$q_1(t)=a\int_0^t q_0(u)\,du.$$

Insă $q_0(t)=k$, deci

$$q_1(t)=kat,$$

$$q_2(t)=k\frac{a^2t^2}{2},\quad q_n(t)=k\frac{a^nt^n}{n!},$$

$$p_n(t)=ke^{-at}\frac{a^nt^n}{n!}$$

$$p_0(t)+p_1(t)+\ldots=k=1.$$

5. *Coeficientul de conexiune* al funcției $f(t,\xi)$ este, potrivit definiției,

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{M[f(t_1,\xi)f(t_2,\xi)]}{\mu(t_1)\,\mu(t_2)},$$

unde

$$\mu^2(t)=M[f^2(t,\xi)].$$

Insă

$$M[f(t,\xi)(f(t+\tau,\xi)-f(t,\xi))]=0,$$

deoarece valoarea medie a produsului a două variabile independente este produsul valorilor medii, iar $M[f(t,\xi)]=0$. Avem deci

$$M[f(t,\xi)f(t+\tau,\xi)]=M[f^2(t,\xi)],$$

$$\rho(t,t+\tau)=\frac{\mu^2(t)}{\mu(t)\,\mu(t+\tau)}=\frac{\mu(t)}{\mu(t+\tau)}.$$

Tinînd seama de formula (7), obținem:

$$\rho(t,t+\tau)=\sqrt{\frac{t}{t+\tau}}=1-\frac{\tau}{t}+\ldots$$

de unde

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\rho(t,t+\tau)}{\tau}\to\frac{1}{t};$$

deci

Teoremă. $1-\rho(t, t+\tau)$ *este de ordinul întîi față de* τ *cînd* $\tau \to 0$.

Ținînd seama de această teoremă, rezultă că $f(t, \xi)$ nu admite o derivată în medie pătratică.

6. Să considerăm o funcție aleatorie $f(t)$ cu creșteri independente:

$$f(t+\tau)=f(t)+[f(t+\tau)-f(t)].$$

Dispersia σ a creșterii $u(t+\tau)-u(t)$, care este independentă de $u(t)$, este legată de dispersiile $\mu(t+\tau)$ și $\mu(t)$ prin relația cunoscută

$$\mu^2(t+\tau)=\mu^2(t)+\sigma^2.$$

Deci,

$$\sigma=\sqrt{\mu^2(t+\tau)-\mu^2(t)}=\sqrt{\mu^2(\tau)},$$

de unde, conform formulei (7), obținem:

$$\sigma=\mu\sqrt{\tau}.$$

Prin urmare,

$$\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\mu\sqrt{\tau}}$$

este o variabilă redusă. Densitatea ei de probabilitate este:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Prin urmare, dacă $\tau \to 0$,

$$g(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\mu\sqrt{\tau}}$$

este o funcție aleatorie cu proprietatea că $g(t)$ și $g(t')$ sînt variabile independente.

Pentru legătura între $f(t)$ și $g(t)$ putem încă scrie, cu P. Levy:

$$f(t)=\int_0^t g(u)\sqrt{du}$$

(convergența integralei fiind m. p.), cu semnificația care rezultă din definiția precedentă a lui $g(t)$.

BIBLIOGRAFIE

K. Bachelier: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

L. Bachelier: Les probabilités cinématiques et dynamiques, Ann. Ec. Normal Sup., t. 30, 1913.

А. Н. Колмогоров: Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М. Л., 1936.

R. Fortet: Sur la notion de fonction aléatoire, Revue Scientifique 79, 1941.

R. Fortet: Les fonctions aléatoires du type de Markoff, Journal de Mathématiques XXII, 1943.

R. Fortet: Quelques travaux récents sur le mouvement brownien, Ann. de l'Inst. H. Poincaré XI. 1949.

W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann. 113, 1937.

P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris.

P. Lévy: Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

O. Onicescu: Théorie générale des chaînes à liaisons complètes, Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1938.

O. Onicescu et *Gh. Mihoc:* Chaînes de variables aléatories. Problèmes asymptotiques, Bucureşti, 1942.

O. Uhlenbeck and *L. Ornstein:* On the theory of the brownian motion. Physic. Review 36, 1930.

S. Chadrasekar: Stochastic Problems in Physics and Astronomy, Review of Modern Physics, vol. 15, nr. 1, 1943.

M. Loève: Fonctions aléatoires du second ordre, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, t. 220, 1945, t. 222, 1946, Paris.

M. Loève: Sur les fonctions aléatoires du second ordre, Revue scientifique, t. 84, 1946.

A. Kolmogorov: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104, 1930.

E. Slutsky: Sur les fonctions aléatoires, Actualités scientifiques, nr. 728, Hermann, Paris.

S. Bernstein: Equations différentielles stochastiques, Actualités scientifiques nr. 728, Hermann, Paris.

J. Kampé de Fériet: Sur le spectre de la turbulence homogène, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. Paris, 1939, p. 722

H. Cràmer: On the theory of stationary random process, Ann. of Math., 1940.

G. Dedebant et *Ph. Wehrlé:* Mecanique aléatoire Portugaliae Physica, 1, 1944.

J. Bass: Sur la structure des fonctions aléatoires, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, 1945.

A. Blanc Lapierre: Les fonctions aléatoires stationnaires Laplaciennes, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, t. 220, 1945.

A. Blanc Lapierre et *R. Fortet:* Analyse harmonique des fonctions aléatoires à caractère stationnaire, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences Paris, t. 225, 1947.

S. Bochner: Stochastic processes, Ann of Math., t. 48, 1947.

J. Kampé de Fériet: Sur les fonctions aléatoires, Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, Paris, t. 225, 1947 şi t. 226, 1948.

Scanned with OKEN Scanner

A. Hincin: Sulle succesioni stazionarie di eventi, Giornale del Inst. Ital. degli Attuari t. 3, 1932.

A. Hincin: Korrelazionstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Ann., t. 109, 1934.

A. Kolmogorov: Sulla forma generale di un processo stocatisco omogeneo, Rendiconti dell' Acad. dei Lincei, t. 15, 1932.

P. Lévy: Sur certains processus stochastiques homogènes, Compositio mathematica, t. 7, 1939.

A. Blanc—Lapierre & R. Fortet: Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.

J. L. Doob: The theoriy of stochastic processes, New-York, 1954.

CAPITOLUL XII

MIŞCAREA BROWNIANĂ

1. *Definiţie.* Mişcarea browniană propriu-zisă constă în sistemul de mişcări ale unor particule foarte mici ale unei substanţe, aflate în suspensie într-un fluid, determinate de ciocnirile cu moleculele fluidului care sînt în stare de agitaţie moleculară. Mişcarea browniană are deci caracteristicile unui fenomen aleator.

Fluidul este presupus omogen, izotrop şi în echilibru termic. Mişcarea este prin urmare permanentă, de aceea ea nu va depinde de momente, ci numai de intervalele de timp în care are loc.

Legea echipartiţiei energiei pentru moleculele fluidului a condus pe fizicieni să considere coordonatele fiecărei particule ca funcţii aleatorii $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, independente între ele şi cu aceeaşi lege de probabilitate.

De unde concluzia grăbită, dar comodă şi utilă, că este suficient studiul uneia dintre aceste funcţii.

2. *Mersul la întîmplare.* Primul examen probabilist al mişcării browniene, semnalată de Brown la începutul secolului trecut, are următoarea schemă, care se regăseşte, aprofundată, şi în unele cercetări recente.

Mişcarea se petrece într-o singură dimensiune. Particula poate avea deplasări de aceeaşi lungime l. După fiecare pas ea poate merge înainte sau înapoi cu aceeaşi probabilitate. Aplicînd regulile obişnuite în calculul probabilităţilor, probabilitatea ca după n paşi particula să se găsească la o distanţă cuprinsă între x_1 şi x_2 de la poziţia iniţială, este, pentru n suficient de mare,

$$P_{x_1, x_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi n l^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2nl^2}} dx. \qquad (1)$$

Valoarea medie a pătratului distanței este, în cei n pași efectuați, sau în n unități de timp,

$$\overline{x^2} = Dn, \tag{2}$$

urmînd să se determine, ținînd seama de fluid, de forma și de natura particulei, coeficientul de difuzie D.

Această schemă, denumită astăzi a *mersului la întîmplare*, a fost reluată recent de mai mulți cercetători, cum sînt: Polya, Hincin, Chandrasekar. Acesta din urmă a ajuns la rezultate interesînd de aproape și alte fenomene fizice.

Observăm imediat că în această cercetare caracterul mecanic al mișcării efectuată de particulă sau forțele care acționează asupra ei nu sînt luate în considerare. Și totuși, rezultatele principale ale acestei teorii reprezentate de formulele (1) și (2) au fost confirmate de experiență și au constituit principala justificare a concepției probabiliste a mișcării browniene.

3. *Formula lui Einstein. Ecuația lui Smoluhovski.* Punctul de vedere mai sistematic și mai complet al lui *Einstein* (1906) și *Smoluhovski* (1906) introduce cercetarea propriu mecanică a forțelor care intervin în mișcarea particulelor și conduce la *precizarea semnificației fizice a coeficientului de difuzie.* Considerații de continuitate înlocuiesc, parțial, punctul de vedere pur discontinuu inițial.

Suspensia este, după Einstein, un colectiv canonic de sisteme, fiecare sistem fiind constituit din cîte o singură particulă. Numărul particulelor care se găsesc într-un element de fază dw este

$$n = Ae^{-\frac{NE}{RT}} dw,$$

N fiind numărul lui Avogadro, $E = E_{cin} + V$ energia și T temperatura absolută.

Fie q una dintre coordonatele de poziție ale sistemului, care nu figurează în E_{cin}, ci numai în V. Putem scrie, punînd în evidență numai componenta dq:

$$n = Be^{-\frac{NV(q)}{RT}} dq = F(q)\, dq. \tag{3}$$

Să considerăm pe q ca o variabilă aleatorie, $\psi(\xi)\, d\xi$ fiind probabilitatea ca ea să aibă o valoare cuprinsă între ξ și $\xi + d\xi$.

Dacă punem $\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \psi(\xi)\, d\xi$, numărul de particule care trec

prin valoarea q_0 în timpul t este, pe de o parte, $-\frac{1}{2}F'(q_0)\overline{\delta^2}$ şi, pe de altă parte, $kfF(q_0)t$, unde $f=-\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{q=q_0}$. Egalînd, obţinem:

$$\overline{\delta^2}=\frac{2RTk}{N}t \qquad (\overline{\delta^2}=\overline{q^2}). \tag{4}$$

Potrivit formulei lui Stokes, $k=\frac{1}{6\pi\zeta a}$ dacă q este parametru de translaţie şi $k=\frac{1}{8\pi\zeta a^3}$ dacă q este un unghi. Numeroase verificări experimentale de mare precizie au fost date acestor formule în special de către *J. Perrin*.

O cercetare analogă pentru un corp solid a fost efectuată mai tîrziu de *F. Perrin* cu rezultate concordante cu acestea.

Prin aceeaşi consideraţie a fiecărui parametru de poziţie q ca o *variabilă* aleatorie, mai precis a drumului $q-q_0$ ca variabilă aleatorie, Einstein şi Smoluhovski asimilează fenomenul mişcării browniene cu procesul de difuziune şi stabilesc faptul că densitatea de repartiţie a drumurilor $q-q_0$, în intervalul (t_0, t), verifică ecuaţia difuziei, sau a căldurii:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho}{\partial q^2} \tag{5}$$

şi este dată de legea gaussiană

$$\rho(q-q_0, t-t_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}}e^{-\frac{1}{4D}\frac{(q-q_0)^2}{t-t_0}}. \tag{6}$$

Introducerea ecuaţiei (5) în cercetarea mişcării browniene şi introducerea de către Smoluhovski a relaţiei funcţionale dintre probabilităţi au însemnat paşi hotărîtori în această teorie, care, totuşi s-a putut constitui sistematic abia începînd din 1930.

4. *Ecuaţia diferenţială stochastică a lui Langevin.* Trebuie însă semnalată teoria foarte importantă a lui *Langevin* (1908), care face să intervină *elementele mecanice* în cercetarea mişcării browniene. Fie m masa particulei, ζ coeficientul de frecare, a raza particulei considerată ca o sferă, X forţa care lucrează asupra particulei (forţa de cîmp). Dacă asimilăm efectul ciocnirilor particulei cu moleculele mediului cu o rezistenţă proporţională cu viteza, atunci mişcarea se va efectua după ecuaţia

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-6\pi\zeta a\frac{dx}{dt}+X, \tag{7}$$

care se transformă, după înmulțirea cu x, în

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2(x^2)}{dt^2} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -3\pi\zeta a \frac{d(x^2)}{dt} + Xx. \qquad (8)$$

Presupunem că toate particulele au aceeași masă și facem media diferiților termeni pentru toate particulele. Aceasta înseamnă să considerăm diferitele mărimi care intervin în ecuație, în primul rînd x și Xx, ca variabile aleatorii cu aceeași funcție de repartiție; t singur nu este variabilă aleatorie.

Avem, prin urmare,

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2(\overline{x^2})}{dt^2} - \overline{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -3\pi\zeta a \frac{d(\overline{x^2})}{dt} + \overline{Xx}.$$

Presupunem $\overline{Xx}=0$ și observăm că, în ipoteza echilibrului termic, energia cinetică medie a particulelor este egală cu energia cinetică medie a moleculelor, deci

$$\overline{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = RT.$$

Ecuația care rezultă, ținînd seamă de aproximațiile îngăduite, ne dă

$$\frac{d(\overline{x^2})}{dt} = \frac{kT}{3\pi\zeta a}.$$

Presupunînd $\overline{x_0}=0$, găsim *relația lui Einstein:*

$$\overline{x^2} = \frac{kT}{3\pi\zeta a}(t-t_0)$$

în concordanță cu experiența.

Cîteva observații asupra acestui procedeu sînt utile.

In rezultat nu intervine legea de distribuție a variabilelor aleatorii considerate. Legătura între valorile variabilei x la două momente diferite nu este stabilită probabilistic, ci numai prin ecuația (7), care este aceea a unui *lanț dublu*; valoarea lui x la fiecare moment este determinată cu probabilitatea 1 de valorile sale în *două momente anterioare.*

Această schemă implică deci, în chip esențial, existența accelerației, dar tot ea conduce la viteze infinite, cum se vede din faptul că $\bar{x}$ este de ordinul $\sqrt{t}$, ceea ce constituie o contradicție esențială, dar de așteptat, avînd în veder econsiderațiile de mai sus. Și totuși, trebuie să observăm că rezultatul său principal este în concordanță cu experiența, ceea ce ar arăta că

nu calculul însuşi este vicios, ci interpretarea lui, sensul care se atribuie mărimilor care figurează în acest calcul şi operaţiilor care figurează în acest calcul, cum sînt, de exemplu, egalitatea dintre $\frac{d(x^2)}{dt}$ şi $\overline{\frac{d(x^2)}{dt}}$ şi celelalte similare.

5. *Procedeul de integrare al lui Uhlenbeck şi Ornstein.* Un progres esenţial în teoria mişcării browniene a fost realizat în 1930 cu memoriul lui *Uhlenbeck şi Ornstein,* care au conceput variaţiile mărimilor $x(t)$ şi $\dot{x}(t)$, caracterizînd, poziţia şi viteza ca *funcţii aleatorii* faţă de timp, corespunzînd, fiecare dintre ele, unui lanţ *Markov continuu.* Noţiunile au fost precizate şi încadrate matematic ca atare abia în 1933 de către Kolmogorov.

Pentru Uhlenbeck şi Crnstein, dacă numim cu $F(u, u+\Delta u; t, t+\Delta t)\,\Delta u$ probabilitatea ca viteza u să aibă o creştere cuprinsă între u şi $u+\Delta u$ în intervalul $t, t+\Delta t$ şi dacă $F(u,t)\,\Delta u$ este probabilitatea ca viteza să aibă, la momentul t, o valoare cuprinsă între u şi $u+\Delta u$, vom avea relaţia lui Chapman—Kolmogorov:

$$F(u, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u-\Delta u, t)\,\Phi(u-\Delta u, u, t, t+\Delta t)\,d\Delta u. \qquad (9)$$

Această relaţie ne conduce la ecuaţia cu derivate parţiale echivalentă, în condiţiile noastre,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} f_2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} - f_1\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} - \frac{\partial f_1}{\partial u}\right) F, \qquad (10)$$

unde

$$f_1 = \lim \frac{\overline{\Delta u}}{\Delta t}, \qquad f_2 = \lim \frac{\overline{(\Delta u)^2}}{\Delta t},$$

în ipoteza că limitele există. Deoarece nu cunoaştem încă probabilitatea de trecere Φ, care ne-ar da posibilitatea să calculăm pe f_1 şi f_2 ca funcţii de u şi t, facem apel la ecuaţia lui Langevin, pe care o scriem astfel:

$$m\frac{du}{dt} = -fu + X(t), \qquad (11)$$

unde f este o constantă de frecare, iar $u(t)$ şi $X(t)$ (forţa) sînt considerate ca *funcţii aleatorii,* variind în timp după un proces de tipul descris mai sus şi regisat de aceeaşi ecuaţie funcţională (9).

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă de aceste caracteristici ale mărimilor $u(t)$ și $X(t)$, se găsește

$$f_1(u,t)=\lim \frac{\overline{\Delta u}}{\Delta t}=-\alpha u, \quad \alpha=\frac{f}{m}$$

și

$$f_2(u,t)=\lim \frac{\overline{(\Delta u)^2}}{\Delta t}=\tau=\frac{2\alpha RT}{m},$$

și (10) ia forma unei ecuații de tip *Fokker-Planck:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\alpha\frac{\partial (uF)}{\partial u}. \tag{12}$$

Această ecuație se reduce, pentru $\alpha=0$, la ecuația difuziei găsită de Einstein, pe care o generalizează. De altfel, α este, în general, mic.

Rămîne să se determine acea soluție $F(u,t)$ care este o densitate de repartiție, deci este pozitivă și verifică egalitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,t)\,du=1.$$

Am văzut că această soluție există, este unică și că, pentru $\alpha=0$, are forma densității de repartiție gaussiană.

Pentru a realiza deducția precedentă, este suficient să se calculeze din (11) primele două momente $M(u)$ și $M(u^2)$, ținînd seamă că pentru $t_0=0$ am avut $u=u_0$. Putem însă calcula toate momentele $M(u^k)$ pentru $k=1,2,\ldots$ și reconstitui, prin cunoașterea momentelor, funcția de repartiție a probabilităților. Uhlenbeck și Ornstein efectuează această operație pentru viteze ca și pentru poziții, după ce integrează ecuația (11):

$$u=u_0 e^{-\alpha t}+e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\xi}F(\xi)\,d\xi,$$

$$x=x_0+\frac{u_0}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})+\int_0^t e^{-\alpha\eta}\,d\eta\int_0^\eta e^{\alpha\xi}F(\xi)\,d\xi.$$

Rezultatul principal al acestei cercetări este că funcția $x(t_0+t)-x(t_0)$ este, pentru fiecare t, o variabilă gaussiană, cu valoare medie zero și varianța egală cu $\frac{\tau}{\beta}(e^{-\beta t}-1+\beta t)$, pentru t intermediar, egală cu βt pentru t mare, însă egală cu $\frac{1}{2}\tau\beta t^2$ pentru t

mic, ceea ce introduce corecția necesară pentru a evita în chiar forma sa imediată contradicția (legată de inexistența accelerației) la care este supusă folosirea ecuației (11).

In această schemă, accelerația există numai în medie. Operațiile de calcul al momentelor de diferite ordine cer unele precizii asupra condițiilor pe care le satisfac mărimile considerate.

6. *Ecuațiile cu diferențe ale lui S. Bernstein.* Acest autor (1934) înlocuiește *ecuația diferențială stochastică* (11) prin sistemul de ecuații cu diferențe

$$\Delta\left(\frac{\Delta\xi_n}{\Delta t}\right) = -\beta\Delta\xi_n + \alpha_n. \qquad (13)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

In aceste ecuații, $\Delta\xi_n = \xi_{n+1}$, iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ este un șir de variabile aleatorii care urmează a fi determinate și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este un șir de variabile aleatorii date, independente între ele. Aceste ecuații determină, din aproape în aproape, distribuții bine definite pentru ξ_n, dacă sînt date distribuțiile variabilelor α_n.

In anumite condiții pentru acestea din urmă, distribuția lui $\frac{\Delta\xi_n}{\Delta t}$ tinde către distribuția lui $u(t)$; însă, cum observă *S. Bernstein*, numai distribuția lui $u(t)$, este aproximată prin distribuția limită de mai sus și nu însuși $u(t)$, deoarece $\Delta\xi_n$ nu sînt diferențe ale lui x, ci ale unui sistem ξ_n, a cărui semnificație concretă nu este evidentă.

7. *Procesul cu creșteri independente al lui Wiener-Doob.* In Memoriul său din 1942, *Doob*, reluînd schema Uhlenbeck și Ornstein și ținînd seamă de faptul că nu trebuie să prejudecăm asupra existenței derivatei $\dot{u}(t)$, scrie ecuația mecanică sub forma

$$du(t) = -\beta u(t)\,dt + dB(t). \qquad (14)$$

In această ecuație, $B(t)$ este o *funcție aleatorie cu creșteri independente*, reprezentînd *un proces diferențial* care corespunde percusiunilor pe care particula le sufere de la moleculele fluidului. Aceasta înseamnă că, dacă $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, noi presupunem că

$$B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

sînt variabile aleatorii independente între ele; presupunem de asemenea că procesul este omogen, adică distribuția variabilelor $B(t_0+t) - B(t_0)$ depinde numai de t.

Se consideră, în special, procesele diferențiale pentru care momentul de ordinul al doilea este finit:

$$\sigma^2(t) = M[(B(t_0+t) - B(t_0))^2] < \infty.$$

Dacă ne aranjăm ca momentul de ordinul întîi să fie zero, atunci, precum se verifică imediat

$$\sigma^2(t+s) = \sigma^2(t) + \sigma^2(s),$$

de unde $\sigma^2(t) = \sigma^2 t$, așa cum am găsit în procesul Einstein-Smoluhovski.

In aceste condiții, se poate vorbi de integrala

$$\int_a^b f(t)\, dB(t),$$

care a fost definită de *Wiener* pentru orice funcție continuă $f(t)$. Ecuația (14) se poate înlocui, cu probabilitatea 1, prin ecuația

$$\int_a^b f(t)\, du(t) = -\beta \int_a^b f(t)\, u(t)\, dt + \int_a^b f(t)\, dB(t), \qquad (15)$$

oricare ar fi f, pentru aproape toate funcțiile $u(t)$.

Nu intrăm aici în amănuntele acestei metode, care are o mare generalitate și a dus la rezultate deosebit de importante și pentru mecanica moleculelor, dat fiind că mișcarea browniană este doar un reflex al acesteia.

Vom observa numai că, dacă această metodă reușește să îndepărteze obiecția gravă relativă la existența derivatei $\dot{u}(t)$, rămîn în picioare alte obiecții.

Cea dintîi obiecție se referă la valoarea, din punct de vedere al teoriei mecanice, a ecuației (14). Dacă există accelerație și dacă $B(t)$ este absolut continuă, atunci (14) este echivalentă cu (11), ecuație newtoniană. In ce măsură și pentru ce sisteme ecuația (14) poate fi acceptată este o problemă care nu se rezolvă de la sine.

Dacă acceptăm această ecuație, considerăm implicit că $x(t)$ corespunde unui lanț dublu, dar, în același timp, în modul de tratare precedent considerăm pe $x(t)$ ca funcție aleatorie corespunzînd unui lanț Markov simplu.

Se poate considera că sistemul $\dot{x}(t)$, $x(t)$ constituie, în mecanica clasică, un lanț diferențial simplu: valorile $\dot{x}(t)$, $x(t)$ date la momentul t, sînt determinate la momentul $t+dt$.

Același lucru se întîmplă într-o mișcare browniană. Funcția aleatorie trebuie să fie, dacă ne mărginim la mișcarea cu o

Scanned with OKEN Scanner

dimensiune, funcţia $(\dot{x}(t), x(t))$ în spaţiul cu două dimensiuni al fazelor acestui sistem.

O a doua obiecţie priveşte numărul de dimensiuni. Mişcarea reală a unei particule este cu trei dimensiuni; prin urmare, dacă $P(t)$ este, la momentul t, un punct în spaţiul cu şase dimensiuni al fazei, urmează să caracterizăm mişcarea prin funcţia vectorială $P(t)$ cu componentele $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, dacă ne referim la o altă particulă luată individual. Dacă este vorba de sistemul tuturor particulelor în suspensie, problema se pune pentru un punct $P(t)$ în spaţiul fazelor acestui sistem şi mişcarea trebuie descrisă ca un lanţ Markov continuu sau discontinuu, după convenienţă, relativ la acest punct.

Pentru valorile mari ale intervalului t, schema Uhlenbeck-Ornstein conduce la aceleaşi rezultate ca şi schema Einstein-Smoluhowski. Ele diferă însă, în general, pentru valori mici ale lui t.

8. *Mişcările browniene ale lui Chandrasekar.* Chandrasekar a dat în 1943 o schemă a mişcării browniene discontinue, inspirată din studiul procesului denumit *mersul la întîmplare*, cu rezultate deosebit de interesante, mai ales pentru un număr mic de paşi efectuaţi.

Reprezentăm printr-un vector $\vec{r}$ o deplasare elementară a unei particule într-un spaţiu euclidian cu n dimensiuni. Poziţia unei particule după N deplasări este dată de vectorul

$$\vec{R} = \sum_{j=1,\,2,\,\ldots\,N} \vec{r}_j . \tag{16}$$

Fie $\tau_i(x_i, y_i, z_i)\,dx_i\,dy_i \ldots dz_i = \tau_i \vec{dr}_i$ probabilitatea ca deplasarea de rangul i să ducă între $\vec{r}_i$ şi $\vec{r}_i + \vec{dr}_i$.

Dacă notăm cu $W_N(\vec{R}_0)\,\vec{dR}_0$ probabilitatea ca vectorul $\vec{R}$ să se găsească în intervalul

$$\Delta:\ \vec{R}_0 - \frac{1}{2}\vec{dR}_0,\quad \vec{R}_0 + \frac{1}{2}\vec{dR}_0,$$

vom avea

$$W_N(\vec{R}_0)\,\vec{dR}_0 = \int_{\Delta} \prod_{j=1,\,2,\ldots N} \tau_j\,\vec{dr}_j .$$

Dacă punem

$$A_N(\vec{\rho}) = \prod_{j=1,2,\ldots,N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{\rho}\cdot\vec{r}_j)} \tau_j \, d\vec{r}_j,$$

unde $\vec{\rho}$ este un vector de componente $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, găsim:

$$W_N(\vec{R}_0) = \frac{1}{2^n \pi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\vec{\rho}\cdot\vec{R}_0)} A_N(\vec{\rho}) \, d\vec{\rho}.$$

Deci, $A_N(\vec{\rho})$ este transformata Fourier a densității de probabilitate.

Iată cîteva modele de mișcări care se obțin pe această cale:

a) Variabila $\vec{R}$ este suma a n variabile $\vec{r}_j$ gaussiene, independente între ele,

$$r_j = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\pi\sigma_j^2\right)^3}} e^{-\frac{3|r_j|^2}{2\sigma}}.$$

$\vec{R}$ fiind ea însăși gaussiană (aditivitatea variabilelor gaussiene).

b) Fiecare deplasare are o anumită lungime l_j, numai direcția este întîmplătoare.

Se ia

$$\sigma_j = \frac{1}{4\pi l_j^2} \delta(|r_j|^2 - l_j^2). \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Rezultă, pentru $n=3$,

$$W_N(R) = \frac{1}{2\pi^2 |R|} \int_0^{\infty} \sin(\rho|R|) \left\{ \prod_{j=1,2,\ldots,N} \frac{\sin(\rho l_j)}{\rho l_j} \right\} \rho \, d\rho.$$

Cazul cel mai interesant este $l_j = l$ și N este un număr mic. Dacă N tinde către infinit, distribuția este normală.

c) N foarte mare și $\tau_j = \tau$. Distribuția este normală:

$$W(R) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 N^3 lmn}} e^{-\frac{(X-Nl)^2}{2Nl} - \frac{(Y-Nm)^2}{2Nm} - \frac{(Z-Nn)^2}{2Nn}}. \qquad (17)$$

După această teorie, *probabilitatea ca o particulă care se mișcă la întîmplare* cu probabilitatea elementară locală $\tau(|r|^2)$,

să aibă, după timpul t, o deplasare cuprinsă între R și $R+dR$, este

$$W(R,\ t)\,dR=\frac{1}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}}\,e^{-|R^2|/4Dt}\,dR. \tag{18}$$

Ecuația lui Smoluhovski-Hostinski

$$\Phi(R,\ t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(R-\Delta R,\ t)\,W(\Delta R,\ \Delta t)\,d\Delta R$$

va da, ținînd seamă că $M((\Delta R)^2)$ este mică,

$$\Phi(R,\ t+\Delta t)-\Phi(R,\ t)=D\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)+0\ (\Delta t),$$

deci, pentru $\Delta t\to 0$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right), \tag{19}$$

care este ecuația difuziei, cu constanta de difuzie D. Această ecuație are ca soluție elementară densitatea de repartiție normală în trei dimensiuni și se poate trata ținînd seamă fie de condiții de regim, fie de condiții limită pentru Φ.

9. *Mecanica aleatorie a lui Kolmogorov.* Procesul aleator folosit este acela constituit de o funcție aleatorie determinată de un lanț Markov continuu în spațiul fazelor, fie pentru o particulă individuală, fie pentru sistem în ansamblul său.

Vom nota cu x un punct al acestui spațiu, care poate fi euclidian sau o varietate riemaniană local compactă. Vom presupune că probabilitatea de trecere din poziția x la momentul s, într-o poziție aparținînd domeniului A, la momentul $t>s$, este

$$P(s,\ x;\ t,\ A)=\int_S\rho(s,\ x;\ t,\ A)\,dx,$$

admițînd astfel o densitate de probabilitate. Aceasta verifică relația funcțională caracteristică lanțului Markov:

$$\rho(s,\ x;\ t,\ y)=\int_S\rho(s,\ x;\ u,\ z)\,\rho(u,\ z;\ t,\ y)\,dz, \tag{20}$$

cu $s\leqslant u\leqslant t$.

In condiții destul de generale, se obține ecuația

$$\frac{\partial\rho}{\partial s}=-\sum_j\alpha_j(s,\ x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\sum_{j,k}\beta_{jk}(s,\ x)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j\partial x_k}, \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

precum şi ecuaţia adjunctă, de tipul Fokker-Planck:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\sum_j \frac{\partial (\alpha_j (t, y)\, \theta)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial^2 (\beta_{jk} (t, y)\, \theta)}{\partial y_j\, \partial y_k}, \qquad (22)$$

unde $|g_{jk}|$ este discriminantul formei pătratice care reprezintă metrica din vecinătatea punctului x. Vom considera cazul mişcărilor permanente, care ne dau lanţ omogen, în care funcţiile A_j, B_{jk} nu depind de t.

Dacă punem în evidenţă, separat, parametrii de poziţie q $(q^1, q^2, \ldots, q^m)$ şi derivatele lor $\dot{q}\,(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n)$, ecuaţia Fokker-Planck devine

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\sum_{j=1, 2, \ldots, m} \dot{q}^i \frac{\partial \theta}{\partial q^i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} [\theta K_j (q, \dot{q})] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} [\theta \beta_{jk} (q, \dot{q})], \qquad (23)$$

unde

$$M[\Delta \dot{q}^j] = K^j \Delta t + 0(\Delta t),$$
$$M[\Delta \dot{q}^j \Delta \dot{q}^k] = \beta_{jk} \Delta t + 0(\Delta t),$$
$$M(\Delta q^j) = \dot{q}^j \Delta t + 0(\Delta t),$$
$$M(\Delta q^j \Delta q^k) = 0(\Delta t).$$
$$j, k = 1, 2, \ldots, m$$

Coeficienţii ecuaţiei (23) pot fi determinaţi aşa cum face *Iaglom*, după exemplul Uhlenbeck-Ornstein sau Langevin, folosind ecuaţiile diferenţiale ale mişcării:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

sau, reduse la forma normală:

$$\frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma^j_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k = Q^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

In ipoteza spaţiului euclidian, $\Gamma^j_{hk} = 0$, deci $\frac{d\dot{q}^j}{dt} = Q^j$, adică $K^j = Q^j$.

In condiţii pe care nu le mai specificăm aici, dar deajuns de largi, cerute în primul rînd de faptul că mişcarea este presupusă reversibilă, ecuaţia (23) admite o soluţie de forma

$$\psi (q, \dot{q}) e^{H(q) - \frac{1}{2} \varphi_{jk} \dot{q}^j \dot{q}_k},$$

care caracterizează un sistem canonic, așa cum s-a prezentat ipotetic în teoria lui Einstein.

Această sistematizare se bazează pe interpretarea mecanică a unui proces Markov, fie că este vorba de mișcarea aleatorie a unei particule individuale, fie că este vorba de un sistem ergodic (final în ansamblul său).

In această privință, el este mai cuprinzător decît celelalte scheme, așa cum remarcă Fortet.

Rămîne problema determinării tensorilor K_j și B_{jk}, pentru care trebuie să facem apel la ecuațiile mișcării care presupun accelerație, și aceasta nu există.

Va trebui să folosim, evident, procedeul lui Doob de a transforma ecuațiile privind derivatele în ecuații privind diferențialele, dar numai cum face Iaglom, pentru a calcula momentele de ordinul întîi și al doilea, care ne vor da pe K_j și B_{jk}, pentru ca apoi urmărirea fenomenului să se facă pe ecuația lanțului și nu pe aceea a mecanicii.

In cadrul acestei operații de folosire dublă a uneia sau alteia dintre cele două ecuații, rămîne să examinăm ce semnificație are ceea ce numim timp, și reprezentăm prin t, în ecuația Fokker-Planck, pe de o parte, și în ecuația mecanicii, pe de altă parte, dacă convenim că ceea ce înțelegem experimental prin t corespunde cu timpul mecanicii.

Pentru valori suficient de mari ale lui t, toate teoriile și experiența sînt de acord în a atribui acestui parametru din ecuația Fokker-Planck aceeași semnificație ca în mecanică.

Pentru valori mai mici ale lui t, în ecuația lui Fokker-Planck-Kolmogorov, acesta nu mai reprezintă timpul, ci numai o valoare proporțională cu momentul de ordinul al doilea al mișcării. Legătura cu noțiunea de timp a acestuia trebuie aprofundată, și aceasta se poate realiza numai direct pe ecuațiile mecanicii și prin experiență. Chestiunea trebuie încă examinată. Această problemă va interveni și în metoda pe care o prezentăm mai jos pentru studiul mișcării browniene și care face apel la teoria lanțurilor Markov propriu-zise, care sînt lanțurile asupra unui număr finit de stări, în ipoteza că sistemul este ergodic sau total.

Proces discontinuu. O schemă generală a mișcării browniene sub forma unui proces discontinuu se poate aplica pentru a reprezenta mișcarea unei particule individuale sau a sistemului în întregime. Vom examina această din urmă problemă.

Caracterizăm starea dinamică a sistemului — poziții și viteze — printr-un vector V într-un spațiu cu un număr adecvat de

dimensiuni. Presupunem că sistemul poate lua un număr finit m de stări, corespunzătoare mărimilor vectoriale

$$V_1,\ V_2,\ldots,\ V_m.$$

Trecerea sistemului de la o stare V_j la alta V_k cu o probabilitate $p_{jk}\ (p_{jk}\geq 0,\ \sum_k p_{jk}=1)$ este presupusă independentă de stările anterioare prin care a trecut sistemul. Vom presupune, în plus, că *există o probabilitate pozitivă de a trece dintr-o stare în oricare alta*, direct sau prin stări intermediare. In acest caz, se știe că sistemul este *ergodic* și *reversibil.*

Fie $\overline{X}_n$ starea pe care o ia sistemul după n treceri dintr-o stare în alta, iar $n_1,\ n_2,\ldots,\ n_m$ frecvențele absolute ale celor m stări:

$$X_1+X_2+\ldots+X_n=n_1V_1+n_2V_2+\ldots+n_mV_m,$$

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n.$$

Considerăm acum variabila aleatorie

$$X_{(n)}=n_1V_1+n_2V_2+\ldots+n_mV_m-n\theta,$$

unde θ este un vector, al aceluiași spațiu, și deocamdată nedeterminat.

Vom numi cu $P_k(n;\ n_1,\ n_2,\ldots,\ n_m)$ probabilitatea ca $X_{(n)}$ să fie în starea $n_1V_1+n_2V_2+\ldots+n_mV_m-n\theta$, dacă starea inițială a fost V_k.

Funcția caracteristică a acestei variabile este, potrivit definiției sale,

$$F_k(n,\ u,\ \theta)=\sum P_k(n;\ n_1,\ldots,\ n_m)\,e^{i\,(n_1V_1+\ldots+n_mV_m-n\theta)\,u},$$

unde se introduce vectorul u, de componente $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_m$.

Din relația funcțională a lanțului Markov obținem sistemul

$$F_k(n,\ u,\ \theta)=\sum_j p_{kj}\,e^{i\,(N_j-\theta)\,u}\,F_j(n-1,\ u,\ \theta), \qquad (L)$$

care caracterizează mișcarea aleatorie considerată.

Sistemul (L) se poate rezolva și obținem:

$$F_k(n,\ u,\ \theta)=\sum_{j=1,\,2,\ldots,\,r}\lambda_j^n A_{kj}(\lambda_j,\ u)+H_k(n), \qquad (24)$$

unde $H_k(n)$ tinde uniform către zero cînd n tinde către infinit, în ipoteza că rădăcinile ecuației $D(\lambda,\ u)=0$ sînt simple.

Se știe că momentul de ordinul întîi al lui $X_{(n)}$ are componentele

$$M_{k,1} = \left(\frac{\partial F_k}{\partial u_j}\right)_{u=0}; \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Derivînd în (24), obținem aceste derivate și folosind proprietățile funcțiilor $A_{kj}(\lambda_j, u)$, găsim:

$$M_{k,1} = -in\lambda_1' + \sum_{j>1} A_j \lambda_j^n + L_k(n).$$

Din ecuația $D(\lambda)=0$ se obține prin derivare

$$\lambda_1' = i \frac{\sum_h P_h (V_h - \theta)}{\sum_h P_h},$$

unde P_h sînt minorii elementelor diagonale în $D(\lambda, 0)$.

Dacă luăm

$$\theta = \frac{\sum_h P_h V_h}{\sum_h P_h},$$

rezultă $(\lambda_1')_{u=0} = 0$. Se verifică de asemenea că $(\lambda_2')_{u=0} = (\lambda_3')_{u=0} = \ldots = (\lambda_n')_{u=0} = 0$; deci, momentul de ordinul întîi se reduce la termenul periodic, în general diferit de zero, și la termenul asimptotic nul. Dacă $r=1$, termenul periodic nu există. Acesta este cazul frecvent.

După ce am fixat pe θ, obținem pentru momentele de ordinul al doilea care sînt egale și de semn contrar

$$\left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0} = n\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0} + \sum_{j>1} B_{\alpha\beta kj} \lambda_j^n + R_k(n).$$

In ipoteza $r=1$, $B_{\alpha\beta kj}=0$, deci momentele sînt reprezentate, în afară de factorul n și de semn, de $\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0}$.

Presupunem că nu toate aceste valori sînt nule și punem

$$h_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right)_{u=0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\lambda_1(u)$ este funcție analitică de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ în vecinătatea originii, vom avea [1]):

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2} \sum h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + R_3.$$

In vecinătatea originii $|\lambda_1| < 1$, deci $\sum h_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ *este o formă definită pozitiv.*

In loc de variabila $X_{(n)}$, vom considera o variabilă redusă

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n\varphi(t)}} X_{(n)}.$$

Aceasta va urma la limită $(n \to \infty)$ legea lui Gauss cu m variabile.

Mișcarea browniană se poate astfel studia în întregime. Rămîne numai să determinăm, pe căile adoptate și în teoria lui Kolmogorov, coeficienții $h_{\alpha\beta}$.

BIBLIOGRAFIE

A. Einstein: Theorie der brownsche Bewegung, Annalen der Physik, t. 17, 1905, t. 19, 1906.

M. Smoluchowski: Theorie der brownsche Bewegung, Annalen der Physik t. 21, 1906.

P. Langevin: Sur le mouvement brownien, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 146, Paris, 1908.

Uhlenbeck and *Ornstein*: On the Theorie on the brownian motion, Physical Review, vol. 36, sept. 1930.

A. Kolmogorov: Zur Therie der brownsche Bewegung, Ann. of Math., t. 35, 1934.

W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Prozessen, Math. Ann., t. 113, 1936.

G. Polya: Sur la promenade au hasard. Travaux du Colloque sur les probabilités de Génève, 1937, în Actualités scientifiques, Hermann. nr. 734, Paris, 1938.

S. Bernstein: Les equations différentielles stochastiques, Actualités scientifiques, Hermann, nr. 738, Paris, 1938.

W. Doeblin: Sur certains mouvements aléatoires, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 208, Paris, 1939.

P. Lévy: Le mouvement brownien plan, Ann. Journal of. Math., vol. LXII, 1940.

O. Onicescu: Theorie des chaînes à liaison complètes, Colloque de Génève, 1937, Actualités scientifiques, nr. 738, Paris, 1938.

M. Kaç: On the average on certain Wiener Funktional Transactions, Ann. of Math. Statistics, vol. 19, 1946.

J. L. Doob: The brownian movement and stochastic equations, Ann. of. Math., t. 43, 1942.

S. Chandrasekar: Stochastic problems in Physics and Astronomy, Reviews of modern Physics, vol. 15, 1943.

O. Uhlenbeck and *I. Wang:* On the theory of the brownian motion, Reviews of modern Physics, vol. 15, 1945.

[1]) Prin R_3 înțelegem că restul este de ordinul al treilea.

J. L. Doob: The elementary gaussian Processus, Ann. of Math. Statistics, nr. 3, 1944.
P. Lévy: Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
H. Steinhaus: La théorie et les applications des fonctions indépendentes au sens stochastique. Les fonctions aléatoires, Actualités scientifiques, nr. 738, Hermann, 1938.
R. Fortet: Quelques travaux récents sur le mouvement brownien, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1949.
M. Kac et *H. Steinhaus*: Sur les fonctions indépendantes, Studia matematica, Varşovia.

CAPITOLUL XIII

CÎMPURI GEOMETRICE DE PROBABILITATE ŞI APLICAŢII LA OPTICA GEOMETRICĂ ŞI CINEMATICĂ

Teoria bernoulliană a probabilităţilor avea la baza ei probabilitatea definită ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile. Evenimentele fundamentale erau în număr finit şi cele două valori, al căror raport reprezenta probabilitatea, erau exprimate prin numere absolute.

Trecerea de la discontinuu la continuu, care se practică în ştiinţele fizice, păstrează acest caracter absolut al numerelor care conduc la probabilitate, după cum am mai arătat şi în primul capitol al acestei cărţi.

Cînd însă punem problema definirii probabilităţii direct pe o mulţime continuă, teoria probabilităţilor se găseşte în faţa unei nedeterminări, în care intuiţia omului de ştiinţă a ştiut uneori să facă o alegere, alte ori s-a arătat, la începuturile teoriei, în neputinţă de a o face.

Cea dintîi problemă directă de probabilităţi continue este problema acului, enunţată de *Buffon* spre sfîrşitul secolului al XVIII-lea. Această problemă, tratată în formă geometrică de către *Barbier*, a căpătat o soluţie cu semnificaţie geometrică. Consecinţa cea mai importantă a acestei soluţii este formulată în următoarea propoziţie: *probabilitatea ca o coardă a unui cerc să taie o curbă convexă închisă interioară cercului, este dată de raportul dintre lungimea curbei şi lungimea cercului*. Această propoziţie, prin caracterul geometric al termenilor al căror raport dau probabilitatea, a dat valoare conceptului de probabilitate geometrică şi a impus străduinţa de a-l asimila, pe de o parte, unei teorii a probabilităţilor destul de generală pentru a-l cuprinde, şi pe de altă parte, de a-l lega de geometrie pen-

Scanned with OKEN Scanner

tru a-i da precizia pe care alte încercări de a defini o probabilitate geometrică nu le puteau realiza.

Astăzi, după ce aceste diferite greutăţi ale începuturilor au fost depăşite, probabilităţile geometrice constituie o ramură aparte, considerată mai mult a geometriei decît a teoriei probabilităţilor.

Locul pe care îl ocupă în această carte este datorit preciziei principiilor care conduc la definirea probabilităţii ca un invariant grupal geometric şi care îi conferă calitatea de model pentru alte domenii de aplicaţii.

§ 1. Probabilităţi continue

1. *Generalităţi şi definiţii.* Considerăm un interval (A, B) finit sau infinit pe axa reală, coordonata carteziană x şi o funcţie continuă $\rho(x)$ pozitivă pentru $x \in (A, B)$ şi pentru care

$$\int_A^B \rho(x)\,dx = 1.$$

Pentru fiecare mulţime măsurabilă ω din (A, B), integrala

$$P(\omega) = \int_\omega \rho(x)\,dx \tag{1}$$

este o funcţie pozitivă total aditivă de ω, egală cu 1, dacă $\omega = (A, B)$. Cîmpul de probabilitate astfel constituit pe (A, B) se numeşte, în general, *continuu.*

Dacă $\rho_1(x) = \frac{1}{B-A}$, probabilitatea continuă astfel definită reprezintă — dacă ω este un interval (a, b) cuprins în (A, B) — raportul lungimilor acestor intervale $P_1(a, b) = \frac{b-a}{B-A}$.

Dacă $\rho_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pentru întreaga axă reală, probabilitatea este gaussiană:

$$P_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\omega e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Pentru intervalul $(0, \infty)$ şi $\rho_3(x) = \frac{1}{k^2} e^{-k^2 x}$, avem o lege de probabilitate cu aplicaţii în teoria emisiei particulelor α.

In acest caz, probabilitatea mulţimii măsurabile ω este

$$P_3(\omega) = \frac{1}{k^2} \int_\omega e^{-k^2 x}\,dx \qquad \omega \in (0, \infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

Fiecare dintre aceste tipuri de probabilităţi continue are semnificaţia ei.

Dacă $\rho(x)=\rho_1(x)$, probabilitatea ca un punct să se găsească în segmentul (a, b) este mărimea geometrică reprezentată de lungimea relativă a segmentului.

Dacă $\rho(x)=\rho_2(x)$, $P_2(a, b)$ poate reprezenta probabilitatea ca, într-o măsurătoare, eroarea $l—M[l]$ să aibă extremitatea în segmentul (a, b).

Dacă $\rho(x)=\rho_3(x)$, $P_3((a, b))$ poate reprezenta probabilitatea ca viaţa unei particule α să fie cuprinsă în intervalul de timp (a, b).

Dintre aceste diferite cîmpuri continue, numai primul are o interpretare geometrică directă şi reprezintă mărimea euclidiană relativă a oricărei mulţimi măsurabile din (A, B).

Dacă punem problema sub următoarea formă: care este cîmpul de probabilitate continuu care are, pentru mulţimile măsurabile ω, o semnificaţie geometrică euclidiană, adică este un invariant pentru transformările care păstrează lungimea oricărui segment, găsim chiar $\rho=\rho_1$, deoarece lungimea sau, mai general, măsura euclidiană înmulţită cu o constantă este singurul invariant aditiv pentru transformări.

2. *Transformarea de variabilă.* Două observaţii sînt de făcut.

Observăm mai întîi că oricare ar fi densitatea de probabilitate $\rho(x)$, continuă şi pozitivă, dacă facem transformarea de variabilă biunivocă şi bicontinuă

$$y=\int_A^x \rho(\xi)\,d\xi, \tag{2}$$

vom avea:

$$P(\omega)=\int_{\omega} \rho(x)\,dx=\int_{\omega_y} dy, \tag{3}$$

unde ω este o mulţime măsurabilă, geometric determinată pe axa Ox, avînd $\omega=\omega_y$ în baza transformării. Integrala $\int_{\omega}\rho(x)\,dx$ este singura expresie euclidiană a probabilităţii şi numai pe această expresie putem judeca direct dacă această probabilitate are sau nu un caracter geometric.

Observăm, în al doilea rînd, că dacă în (1) facem o schimbare de variabilă $x=f(z)$, *funcţia* z *avînd derivată pozitivă în tot intervalul* (A, B),

$$P(\omega)=\int_{\omega_z}\rho(x)\,f'(x)\,dx=\int_{\omega_z}\bar{\rho}(z)\,dz,$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem o expresie a probabilității în variabila z, care nu mai este carteziană, cu densitatea $\rho(z)=\rho(f(z))f'(z)$, de asemenea pozitivă.

Dacă $\rho(x)=\frac{1}{B-A}$, noua expresie a probabilității geometrice, cu variabila z, este $\int_{\omega_z} f'(z)\,dz$.

3. Pentru cazul spațiului euclidian cu n dimensiuni, vom considera un domeniu finit simplu conex D și o funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continuă și pozitivă de coordonatele carteziene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unui punct M din D.

O integrală

$$I(f, D)=\int_D f(P)\,dP=\int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad (4)$$

este definită, după cum se știe, în modul următor:

Se consideră o diviziune a spațiului în intervale

$$l_j\delta_j \leqq x_j \leqq (l_j+1)\delta_j, \quad (j=1, \ldots, n; \quad l_j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad (5)$$

în care $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j$ sînt numere pozitive date, și reprezentăm lungimea laturilor intervalului. Se consideră intervalele interioare domeniului D și se numerotează $D_{\delta,1}, D_{\delta,2}, \ldots, D_{\delta,N_\delta}$. Fie, în același timp, $V_{\delta,\tau}$ volumul corespunzător celulei $D_{\delta,\tau}$ și diviziunii $\delta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Dacă

$$\| \delta \| = \sup(\delta_j),$$

prin definiție,

$$I(f,D)=\lim_{\tau=1,2,\ldots,N_\delta} \sum f(P_\tau)\, V_{\delta,\tau} \quad (6)$$

cînd $\| \delta \| \to 0$.

Egalitatea precedentă se mai poate scrie, ținînd seama că $V_{\delta,\tau}=\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$:

$$I(f, D)=\lim_{\tau=1,2,\ldots,N_\delta} \sum f(P_\tau)\,\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$$

sau, și mai general,

$$I(f, D)=\lim_{\tau=1,2,\ldots,N_\delta} \sum f(P_\tau)\,\delta_{1,2}\delta_{2,2} \ldots \delta_{n,2}, \quad (7)$$

cînd

$$\| \delta \| = \sup(\delta_{j,\tau}) \to 0.$$

Expresia (4) a integralei justifică notația din (5).

Aceeaşi integrală $I(f, D)$ se poate obţine cu ajutorul oricărei diviziuni celulare a spaţiului. Vom considera numai celule paralelipipedoidale. Volumul unei atare celule este

$$V_{\delta,\tau} = \begin{vmatrix} \delta_{11,\tau} & \delta_{12,\tau} \dots \delta_{1n,\tau} \\ \delta_{21,\tau} & \delta_{22,\tau} \dots \delta_{2n,\tau} \\ \vdots & \\ \delta_{n1,\tau} & \delta_{n2,\tau} \dots \delta_{nn,\tau} \end{vmatrix},$$

unde $\delta_{ij,\tau}$ este variaţia pozitivă pe care o suferă x_i în direcţia laturii j a celulei, aceasta pentru celula numerotată τ.

Avem, deci,

$$\delta_{ij,\tau} = [\delta_i(x_j)],$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ fiind coordonatele vîrfului cu cele mai mici coordonate ale celulei $D_{\delta,\tau}$.

Prin urmare, (7) este numai o formă particulară a formulei

$$I(f, D) = \lim_{||\delta||\to 0} \sum_{\tau} f(D_\tau) \begin{vmatrix} \delta_{11,\tau} & \delta_{12,\tau} \dots \delta_{1n,\tau} \\ \delta_{21,\tau} & \delta_{22,\tau} \dots \delta_{2n,\tau} \\ \vdots & \\ \delta_{n1,\tau} & \delta_{n2,\tau} \dots \delta_{nn,\tau} \end{vmatrix} \tag{8}$$

sau

$$I(f, D) = \lim_{||\delta||\to 0} \sum_{\tau} f(x_1^\tau, x_2^\tau, \dots, x_n^\tau) \begin{vmatrix} \delta_1 x_1^\tau & \delta_1 x_2^\tau \dots \delta_1 x_n^\tau \\ \delta_2 x_1^\tau & \delta_2 x_2^\tau \dots \delta_2 x_n^\tau \\ \vdots & \\ \delta_n x_1^\tau & \delta_n x_2^\tau \dots \delta_n x_n^\tau \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Efectuăm o schimbare de variabile

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{10}$$

care face să corespundă domeniului simplu convex D, domeniul simplu conex E avînd derivate continue şi pentru care

$$H(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} > 0 \tag{11}$$

în E şi pe frontiera sa.

Din (10) rezultă

$$\delta_j x_i = \sum \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)_j \delta_j y_k,$$

unde $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)_j$ este derivata parțială $\frac{\partial \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_k}$, în care am înlocuit pe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ respectiv cu $y_1 + \theta_1 \delta_j y_1, y_2 + \theta_2 \delta_j y_2, \ldots, y_n + \theta_n \delta_j y_n$, $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1, \ldots, 0 < \theta_n < 1$.

Dar atunci

$$\begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 \ldots \delta_1 x_n \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 \ldots \delta_2 x_n \\ \vdots & \\ \delta_n x_1 & \delta_n x_2 \ldots \delta_n x_n \end{vmatrix} = H^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) \begin{vmatrix} \delta_1 y_1 & \delta_1 y_2 \ldots \delta_1 y_n \\ \delta_2 y_1 & \delta_2 y_2 \ldots \delta_2 y_n \\ \vdots & \\ \delta_n y_1 & \delta_n y_2 \ldots \delta_n y_n \end{vmatrix},$$

unde

$$H^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\right)_1 & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\right)_1 \cdots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}\right)_2 & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}\right)_2 \cdots \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n}\right)_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}\right)_n & \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2}\right)_n \cdots \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}\right)_n \end{vmatrix}.$$

Derivatele $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)_j$ fiind continue prin ipoteză, cînd $\|\delta\| \to 0$, vom avea:

$$H^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) \to H(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

uniform în domeniul finit E.

Fie acum $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție continuă și pozitivă în D, pentru care

$$\int_D \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1;$$

ω fiind o mulțime măsurabilă din D, vom pune

$$P(\omega) = \int_\omega \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

determinînd astfel un cîmp de probabilitate continuu pe D.

Dintre aceste probabilități, *una singură are o semnificație geometrică euclidiană pentru spațiul* R^n și mulțimile de puncte ale domeniului D, și anume aceea care corespunde densității $\rho = \frac{1}{v(D)}$ ($v(D)$ este volumul domeniului D), pentru că aceasta

este singura densitate invariantă pentru transformările euclidiene ale spațiului, în special pentru translații.

Și în cazul general putem efectua o transformare biunivocă și continuă în D:

$$x_j = f_j(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

pentru care determinantul funcțional

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

este pozitiv și continuu. Vom avea, prin efectul acestei transformări,

$$P(\omega) = \int_{\omega_x} \rho dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_{\omega_y} \rho \Delta \, dy_1 dy_2 \ldots dy_n,$$

iar dacă luăm în considerare, dintre aceste probabilități continue, numai probabilitatea geometrică $\rho = \frac{1}{v(D)}$, găsim

$$P(\omega) = \frac{1}{v(D)} \int_{\omega_x} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{v(D)} \int_{\omega_y} \Delta \, dy_1 dy_2 \ldots dy_n.$$

4. Afirmația făcută mai sus, că singura densitate de probabilitate în *coordonate carteziene*, care are semnificația geometrică, este $\rho = \frac{1}{v(D)}$, trebuie înțeleasă numai în sensul precis următor: această densitate este singura care are semnificație geometrică — poate fi exprimată prin proprietăți ale configurațiilor de puncte ale spațiului euclidian R^n, singura, deci, care rămîne invariantă pentru transformările euclidiene ale acestui spațiu.

Demonstrația rezultă din faptul că această densitate este singura care rămîne invariantă pentru orice translație și orice rotație a spațiului în el însuși.

Se verifică, de altfel, următoarea proprietate mai generală:

$$P(\omega) = \frac{\int_{\omega} dx^1 dx^2 \ldots dx^n}{\int_{D} dx^1 dx^2 \ldots dx^n}$$

este invariant pentru orice afinitate proprie: $x^j = a^j_k y^k$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$. O integrală $\int_{\omega} \rho(x^1, x^2, \ldots, x^n) \, dx^1 dx^2 \ldots dx^n$ în coordonate carteziene,

unde ρ nu este o constantă, *poate avea însă o semnificație geometrică pentru obiectele geometrice ale unui alt spațiu decît acela în care se calculează această integrală.* Teoria probabilităților geometrice își propune să determine astfel de integrale pentru a exprima măsura relativă a diferite mulțimi de obiecte geometrice, cum sînt dreptele planului sau ale spațiului, planele, arcele, sferele etc., sau, ceea ce constituie o categorie specială de probleme, pentru sisteme de două, trei sau mai multe puncte de pe un segment sau dintr-o figură geometrică dată.

§ 2. Măsura invariantă pentru mulțimea de drepte ale planului

Fie D o dreaptă generică a planului euclidian pe care luăm ca reper un punct O și o axă O_j. Poziția dreptei D este fixată prin distanța p de la O la D, măsurată pe perpendiculara dusă din O la D, și prin unghiul θ al acestei perpendiculare cu axa O_j; p ia orice valoare pozitivă, iar unghiul θ orice valoare între 0 și 2π.

Schimbarea reperului O_j în O'_j, induce următoarea transformare (euclidiană) a coordonatelor dreptei:

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + r\cos(\theta - \alpha), \\ \theta' &= \theta - \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Determinantul funcțional al acestei transformări este 1. Pentru ca $\int_\omega \rho(p,\theta)\,dpd\theta$ să fie invariant, este necesar ca $\rho(p,\theta)$ să fie invariant pentru transformarea (1), ceea ce atrage după sine $\rho = \text{const}$. *Rezultă că*

$$I_\omega = \int_\omega dp\,d\theta \qquad (2)$$

este o măsură (euclidiană, invariantă) a mulțimii dreptelor din plan care îndeplinesc condiția ca punctul reprezentativ al dreptei de coordonate (carteziene) p, θ să se găsească în domeniul ω.

Se demonstrează imediat că I_ω este singura măsură (euclidiană) invariantă. In adevăr, fie α, β un alt sistem de doi parametri care corespund biunivoc dreptelor planului. Rezultă că între (α,β) și (p,θ) există o corespondență biunivocă

$$\alpha = f(p,\theta), \quad \beta = g(p,\theta), \qquad (3)$$

care, presupunem, are un determinant funcțional determinat și, evident, diferit de zero.

$\int_{\omega} \rho(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$ este o măsură euclidian invariantă. Efectuînd transformarea (3), obţinem :

$$\int_{\omega} \rho(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \int_{\omega} \rho(\alpha, \beta) \frac{D(\alpha, \beta)}{D(p, \theta)}\, dp\, d\theta.$$

Am arătat mai sus că, în acest caz,

$$\rho(\alpha, \beta) = C \frac{D(p, \theta)}{D(\alpha, \beta)},$$

ceea ce confirmă propoziţia enunţată.

Propoziţia 1. Măsura euclidiană a mulţimii de drepte neorientate care întîlnesc un segment OA de lungime l este 2l.

Această măsură este dată de

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{l \cos \alpha} dp = 2l.$$

Propoziţia 2. Măsura euclidiană a mulţimii de drepte care întîlnesc un poligon convex cu perimetrul L este L.

In adevăr, dacă facem suma măsurilor mulţimilor de drepte care întîlnesc una dintre laturile unui poligon convex, cum fiecare dreaptă întîlneşte două laturi ale poligonului, această sumă este $2L$, deci măsura mulţimii dreptelor luate o singură dată este L.

Propoziţia 3. Măsura euclidiană a mulţimii de drepte care întîlnesc o curbă convexă închisă este perimetrul curbei.

Această propoziţie este o consecinţă imediată a precedentei. Transpunerea ei numerică este

$$L = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\varphi(\theta)} dp = \int_{0}^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta, \tag{4}$$

unde $\varphi(\theta)$ este distanţa de la originea O, situată în interiorul curbei convexe, la tangenta la curbă, care are direcţia θ.

Propoziţia 4. Probabilitatea ca o coardă a unui cerc de rază R să întîlnească o curbă convexă de lungime L, interioară cercului, este

$$P = \frac{L}{2\pi R}. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta este expresia probabilității după definiția ei:

$$P=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi(\theta)} d\theta\, dp=\frac{L}{2\pi R}.$$

Propoziția 5. Probabilitatea ca o coardă a unui cerc de rază R să întîlnească un segment de dreaptă de lungime l, interior cercului, este

$$P=\frac{2l}{2\pi R}. \qquad (6)$$

Segmentul de dreaptă poate fi considerat ca un poligon convex cu perimetrul $2l$.

Propoziția 6 (teorema acului). Probabilitatea ca un arc de lungime l să întîlnească una dintre dreptele unei serii de drepte paralele echidistante, la distanța $2R\,(>e)$ este dată de (6).

Expresia probabilității geometrice din această propoziție este dată de propoziția (5), de unde și rezultatul.

Dăm încă următoarele propoziții simple.

Propoziția 7. Măsura mulțimii de drepte neorientate care intersectează o curbă închisă Γ din plan este limita inferioară a perimetrelor curbelor convexe care o cuprind în interior.

Demonstrația rezultă din următoarele constatări:

Măsura căutată este mai mică (cel mult egală) decît măsura corespunzătoare la fiecare curbă convexă C, care cuprinde în interior pe Γ.

Perimetrele curbelor convexe C au un minim unic. Dacă D este o curbă convexă interioară tuturor curbelor C, mulțimea dreptelor care o intersectează este mai săracă decît mulțimea dreptelor care intersectează pe Γ.

Propoziția 8. Măsura mulțimii de coarde ale unui arc convex AMB de lungime L este $L-AB$ (AB este lungimea coardei care unește extremitățile).

Drepte din plan care întîlnesc două ovale. Considerăm două curbe convexe închise Γ_1 și Γ_2, fără puncte comune. Există două tangente interioare comune care se întîlnesc într-un punct O și două tangente exterioare comune.

Fie C_i cea mai redusă curbă convexă care înfășură curba Γ_i și punctul O $(i=1,2)$. C_1+C_2 este măsura mulțimii de drepte care întîlnesc fie curba C_1 fie curba C_2, dreptele care întîlnesc ambele curbe C_1 și C_2 în același timp, deci ambele curbe Γ_1 și Γ_2 în același timp, și a căror măsură o notăm cu

Γ_{12}, fiind socotite de două ori. Rezultă că $C_1+C_2-\Gamma_{12}$ este măsura mulțimii dreptelor care întîlnesc curbele C_1, C_2. Dar această valoare este dată de lungimea înfășurătoarei exterioare C a celor două curbe. Prin urmare,

$$C_1+C_2-\Gamma_{12}=C,$$

de unde

$$\Gamma_{12}=C_1+C_2-C$$

reprezintă măsura mulțimii de drepte care întîlnesc cele două curbe Γ_1 și Γ_2 în același timp.

§ 3. Sisteme de puncte

1. *O formulă a lui Crofton.* Se consideră un sistem de n puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$, cuprinse într-un domeniu mărginit și închis D al spațiului euclidian E_m.

Vom considera spațiul euclidian $E_m \times E_m \times \ldots \times E_m = E_{nm}$ și punctul P situat în acest spațiu, reprezentativ al sistemului $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Vom numi $D_{(n)}$ domeniul din E_{nm} produs cartezian al domeniului D cu el însuși de n ori:

$$P \in D_{(n)}.$$

Măsura domeniului $D_{(n)}$ este V^n, dacă măsura domeniului D este V.

O condiție C impusă sistemului de puncte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ este realizată de unele configurații ale sistemului și nu este realizată de celelalte. Fie $\Gamma_{(n)}$ mulțimea punctelor P din $D_{(n)}$ care corespund configurațiilor C. Presupunem că $\Gamma_{(n)}$ este măsurabilă și măsura ei este Γ. Probabilitatea ca o configurație $P_1, P_2, \ldots, P_n$ să verifice condiția C este prin definiție

$$P_C=\frac{\Gamma}{V^n}. \qquad (1)$$

Această mărime are caracter geometric euclidian, pentru că fiecare dintre cele două măsuri Γ și V au acest caracter.

Fie acum un alt domeniu D' mărginit și închis, cuprinzînd pe D:

$$D' \supset D.$$

Notăm cu Γ'_n mulțimea punctelor din D'_n care corespund configurațiilor C din D'. Probabilitatea corespunzătoare este

$$P'_C = \frac{\Gamma'}{V'^n}. \tag{2}$$

Dacă notăm cu $\Gamma'_{n,k}$ mulțimea punctelor din D'_n care corespund unei configurații $P_1, P_2, \ldots, P_n$, din care k puncte se găsesc în $D'-D$ iar restul în D, aceste mulțimi sînt disjuncte. Notînd cu Γ'_k măsura mulțimii $\Gamma'_{n,k}$, vom avea:

$$\Gamma'_n = \sum_{k=0,\,1,\,\ldots\,,\,n} \Gamma'_k. \tag{3}$$

Pe de altă parte, dacă P_k este probabilitatea unei configurații C cu k puncte în $D'-D$, avem:

$$\Gamma'_k = C_n P_k V^{n-k}(V'-V)^k. \tag{4}$$

Deci, ținînd seama de (2) și (4), egalitatea (3) ne dă, observînd că $P_0 = P_C$,

$$P'_C V'^n = P_C V^n + nP_1 V^{n-1}(V'-V) + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k P_k V^{n-k}(V'-V)^k + \ldots + P_n(V'-V)^n$$

sau

$$(P_C+\delta P_C)(V+\delta V)^n = P_C V^n + nP_1 V^{n-1}\delta V + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k P_k V^{n-k}(\delta V)^k + \ldots + P_n(\delta V)^n. \tag{5}$$

De unde, după ce dividem cu δV:

$$V^n \frac{\delta P_C}{\delta V} = n(P_1 - P_C) V^{n-1} + \frac{0(\delta V)}{\delta V}.$$

Această relație a lui *Crofton* se mai poate scrie:

$$\frac{\delta P_C}{\delta V} = n\frac{P_1 - P_C}{V} + \frac{0(\delta V)}{\delta V} \tag{6}$$

și se utilizează, cum este natural, cînd δV tinde către zero, astfel că P_1 reprezintă probabilitatea de realizare a condiției C cînd unul dintre punctele configurației se găsește pe frontiera domeniului D.

Această formulă reduce problema la aceea a determinării directe a probabilității P_1, după care urmează integrarea unei ecuații diferențiale pentru a găsi probabilitatea P_C.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Sistemul complet de ecuații.* Revenim acum la relația (5) în care punem:

$$\delta P_C = \frac{dP_C}{dV}\delta V + \frac{1}{2}\frac{d^2P_C}{dV^2}(\delta V)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3P_C}{dV^3}(\delta V)^3 + \ldots \qquad (7)$$

Obținem:

$$P_C V^n + \left(\frac{dP_C}{dV} V^n + C_n^1 P_C V^{n-1}\right)\delta V + \left(\frac{1}{2} V^n \frac{d^2P_C}{dV^2} + C_n^1 V^{n-1}\frac{dP_C}{dV} + C_n^2 V^{n-2} P_C\right)(\delta V)^2 + \left(\frac{1}{3!} V^n \frac{d^3P_C}{dV^3} + \frac{1}{2} C_n^1 \frac{d^2P_C}{dV^2} V^{n-1} + C_n^2 V^{n-2}\frac{dP_C}{dV} + C_n^3 V^{n-3} P_C\right)(\delta V)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n!} V^n \frac{d^nP_C}{dV^n} + \frac{1}{(n-1)!} C_n^1 V^{n-1}\frac{d^{n-1}P_C}{dV^{n-1}} + \ldots + C_n^n P_C\right)(\delta V)^n + \ldots = P_C V^n + C_n^1 P_1 V^{n-1}\delta V + C_n^2 P_2 V^{n-2}(\delta V)^2 + \ldots + P_n(\delta V)^n.$$

De unde, șirul de ecuații diferențiale

$$\left.\begin{aligned} & V\frac{dP_C}{dV} + nP_C = nP_1, \\ & \frac{1}{2} V^2 \frac{d^2P_C}{dV^2} + nV\frac{dP_C}{dV} + \frac{n(n-1)}{2} P_C = \frac{n(n-1)}{2} P_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \frac{1}{n!} V^n \frac{d^nP_C}{dV^n} + \frac{1}{(n-1)!} V^{n-1}\frac{d^{n-1}P_C}{dV^{n-1}} + \ldots + P_C = P_n, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

dintre care ecuația lui Crofton este cea mai simplă din punct de vedere diferențial. Ultima este însă cea mai satisfăcătoare pentru problema însăși, deoarece determinarea lui P_n este, în genere, simplă.

Valoarea lui P_n și, în general, a probabilităților $P_1, P_2, \ldots, P_n$ depinde de familia D_V de domenii care variază cu volumul, astfel că, dacă $V' > V$, și $D_{V'} \supset D_V$.

Vom presupune că, fiind dat un punct M pe frontiera lui D și un ε pozitiv arbitrar, există un D_{V_ε} cu proprietatea următoare:

$$V_\varepsilon > V$$

$$D_V \subset D_{V_\varepsilon} \subset D_V \cup C_{M,\varepsilon},$$

$C_{M,\varepsilon}$ fiind hipersfera cu centrul în M și cu raza ε.

Scanned with OKEN Scanner

In afară de aceasta, D_V variază astfel ca toate derivatele considerate mai sus, pînă la ordinul n, să existe.

Prin acest procedeu, regiunea de frontieră interesantă pentru problemă se reduce la punctul M.

3. *Exemple.*

I. *Să se determine probabilitatea ca două puncte din segmentul OA, de lungime a, să aibă o distanță b mai mică decît a* $(b<a)$.

Sînt două ecuații:

$$a\frac{dP_C}{da}+2\,(P_C-P_1)=0,$$

$$\frac{1}{2}\,a^2\frac{d^2P_C}{da^2}+2a\frac{dP_C}{da}+P_C-P_2=0;$$

P_2, probabilitatea ca distanța celor două puncte situate amîndouă în A să fie mai mică decît b, este deci egală cu zero. In cazul de față, P_1 este și el cunoscut și anume $P_1=\frac{b}{a}$. Putem deci integra imediat prima ecuație, care se mai poate scrie

$$\frac{d}{da}\,(a^2P_C)=2b,$$

de unde

$$a^2P_C=2ab+k.$$

Pentru $a=b$ avem $P_C=1$, deci $k=-b^2$. De unde

$$P_C=\frac{2b}{a}-\frac{b^2}{a^2},$$

care este o valoare pozitivă și mai mică decît unu. A doua ecuație este de asemenea verificată pentru $P_2=0$ și P_C dat mai sus.

II. *Probabilitatea ca două puncte situate în interiorul unei curbe convexe să fie la o distanță mai mică decît* λ.

Fie A o curbă convexă închisă și D domeniul închis pentru care A este frontieră. Fie

$$x=f(s),\qquad y=g(s)$$

reprezentarea parametrică a curbei și

$$x=\alpha f(s),\qquad y=\alpha g(s)$$

familia de curbe convexe A_α. Avem evident, $A_\alpha=A$ pentru $\alpha=1$. Presupunem că $f(s)$ și $g(s)$ au derivate de ordinul întîi. Vom avea, evident,

$$V_\alpha=\alpha^2\int[f(s)\,g'(s)-g(s)\,f'(s)]ds=\alpha^2V,$$

unde V este suprafața domeniului D. Deci,

$$\frac{dV_\alpha}{d\alpha}=2\alpha V.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima dintre ecuațiile (8) devine:

$$\frac{dP}{d\alpha}=4\alpha\,(P-P_1).$$

A doua ecuație, ținînd seama că $P_2=0$, devine:

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}+8\alpha\,\frac{dP}{d\alpha}+8\alpha^2=0.$$

Integrala generală a acestei ecuații este

$$P=C_1e^{-(2+\sqrt{2})\,\alpha^2}\int_0^{\infty}e^{-u\alpha}u^{\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{u^2}{8\sqrt{2}}}du+C_2\int_0^{\alpha}Q^{-2}(u)\,e^{2\sqrt{2}u^2}\,du,$$

unde Q este integrala din primul termen.

Cu aceasta, înlocuind în ecuația precedentă, vom avea expresia probabilității P_1 în funcție de constantele C_1, C_2, ca și a probabilității P. Valorile lui P și P_1, pentru o alegere convenabilă a parametrului α, vor determina pe C_1 și C_2. Determinarea depinde evident de curba A.

4. *Variabile aleatorii și valori medii.* Lungimea coardei interceptată de o curbă convexă închisă Γ pe o dreaptă D este o funcție $x=f(D)=f(p,\,\theta)$, determinată pentru orice dreaptă D.

Momentele acestei variabile aleatorii sînt

$$M_k=M[x^k]=\frac{1}{L}\int_{\Gamma(D)}f^k(p,\,\theta)\,dp\,d\theta,\qquad(k=0,\,1,\,2,\ldots)$$

înțelegînd prin $\Gamma(D)$ domeniul acoperit de punctele de coordonate carteziene $(p,\,\theta)$, care corespund secantelor curbei Γ, iar prin L lungimea curbei.

Pentru cîmpurile geometrice determinate de perechi de puncte, o variabilă aleatorie este însăși distanța euclidiană între cele două puncte.

Un proces diferențial analog cu acela folosit de Crofton pentru determinarea probabilității unei configurații C, constituită din n puncte ale unui domeniu D, dă procedee de calcul pentru valorile medii.

Fie $x=f(P_1,\,P_2,\ldots,\,P_n)$ o variabilă aleatorie simetrică, asociată sistemului celor n puncte $P_1,\,P_2,\ldots,\,P_n$. Cu măsura euclidiană, valoarea medie a acestei variabile este

$$m=M[y]=\frac{1}{V^n}\int_{D(n)}f(P_1,\,P_2,\ldots,P_n)\,dP_1\,dP_2\ldots dP_n=\frac{W}{V^n}\cdot\qquad(9)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru domeniul D' vom avea, în mod analog,

$$m' = \frac{W'}{V'^n} \tag{10}$$

sau

$$(m+\delta m)(V+\delta V)^n = W + W_1 + \ldots + W_n, \tag{11}$$

unde $\frac{1}{V'^n} W_k$ este valoarea medie a variabilei x pentru configurațiile formate din k puncte situate în $D'-D$ și $n-k$ puncte în D.

Presupunem că deformarea domeniului D depinde de un singur parametru și vom obține din (11), ca și pentru probabilitate, relația diferențială

$$\delta m = n(m_1 - m)\frac{\delta V}{V}, \tag{12}$$

unde m_1 este valoarea medie a variabilei x pentru mulțimea configurațiilor obținute, păstrînd unuia dintre puncte poziția de pe frontiera lui D, care corespunde limitei diferenței $D'-D$.

Pentru exemplul *I*, dacă luăm $x = |x_2 - x_1|^k$,

$$m_1 = \frac{1}{a}\int_0^a l^k\, dl = \frac{a^k}{k+1},$$

de unde ecuația (12), care devine

$$\frac{dm}{da} = 2(m_1 - m)\frac{1}{a},$$

și ne dă

$$m = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)}.$$

§ 4. Aplicații

1. *O teoremă de optică geometrică.* Teorema pe care o dăm aici, deși este un caz particular al unei teoreme generale de mecanică, se prezintă deosebit de simplu și sugestiv în lumina metodelor întrebuințate în acest capitol. Ea poate fi formulată astfel:

Distribuția razelor plane care se refractă de-a lungul unui arc de curbă Γ *— despărțitoare a două medii plane — este invariantă prin refracție.*

Demonstrația foarte simplă este datorită lui *W. Blaschke*. Fie Γ un arc de curbă simplă posedînd tangenta continuă, P un punct oarecare de pe acest arc, funcție de lungimea de arc s, τ unghiul tangentei în P în direcția arcului crescător, cu o direcție de reper, D o dreaptă (rază luminoasă) care trece prin P, iar φ direcția normală la D dusă din reperul O. Vom avea:

$$dp\,d\varphi = \cos(\tau - \varphi)\,ds\,d\varphi.$$

Notînd cu θ unghiul dintre raza D și normala la curbă, găsim:

$$\theta = \pi - (\tau - \varphi).$$

Prin urmare,

$$dp\,d\varphi = -\cos\theta\,ds\,d\varphi.$$

După refracție, raza D se transformă în D'. Notînd cu θ' unghiul razei D' cu normala, avem relația

$$\frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = i,$$

unde indicele de refracție i este o constantă. Din această relație rezultă

$$\cos\theta'\,d\theta' = i\cos\theta\,d\theta.$$

Pe de altă parte, $d\varphi = d\theta$, pentru O fix, deci

$$dp'\,d\varphi' = \cos\theta'\,ds\,d\varphi' = i\cos\theta\,ds\,d\varphi = i\,dp\,d\varphi.$$

Teorema este astfel demonstrată.

2. *Probabilitate cinematică*. După Poincaré, acest nume se dă probabilității ca un reper euclidian mobil, constituit — în cazul planului — dintr-un punct și o direcție, să împlinească anume condiții, formulate în termeni de geometrie euclidiană.

Pentru aceasta, trebuie să alegem, o dată cu parametrii care fixează poziția reperului și care sînt x, y, cele două coordonate carteziene ale punctului față de un reper fix și φ, unghiul direcției mobile cu direcția fixă, densitatea de repartiție invariantă pentru mișcările euclidiene ale planului.

Se verifică imediat că *această densitate este o constantă, pentru orice mișcare euclidiană*, deoarece determinantul

$$\frac{D(X', Y', \theta')}{D(X, Y, \theta)} = 1.$$

pentru orice mișcare euclidiană.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

M. W. Crofton: On the theory of local probability, Phil. Trans. of the Royal Soc., 1868.

E. Cartan: Le principe de la dualité, Bull. Soc. Math. de France, 24, 1896.

H. Poincaré: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

H. Lebesgue: Exposition d'un Memoire de M. W. Crofton, Nouvelles Annalles, 12, 1912.

G. Castelnuovo: Calcolo delle probabilitá, Roma, 1919.

R. Deltheil: Probabilités géometriques, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

W. Blaschke: Integralgeometrie 1. Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1935.

W. Blaschke: Integralgeometrie 2, Bull. Soc. Roumaine des Sciences, 1936.

W. Blaschke: Integralgeometrie 12. Über vollkommene optische Instrumente, Abhandlungen, Hamburg, 1936.

W. Blaschke: Integralgeometrie 13, Math. Zeitschrift, 40, 1935.

L. A. Santalo: Über das kinematische Mass, Actualités scientifiques, Hermann, Paris, 1936.

W. Blaschke: Cinematica integrale, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, 1, 4, 1936.

W. Maak: Integralgeometrie, 18 şi 27, Abhandlungen, Hamburg, 12, 1936.

L. A. Santalo: Integralgeometry on surfaces of constant negative curvature, Duke Mat., 10, 143.

M. Stoka: Măsura mulțimilor de varietăți dintr-un spațiu R_n, Buletin științific Acad. R. P. R., secția de științe matematice și fizice, nr. 4, 1955.

M. Stoka: Asupra măsurii mulțimilor de cercuri din plan, Gazeta Matematică și Fizică, nr. 10, 1955.

CAPITOLUL XIV

TEOREMA NUMERELOR MARI ŞI PROBLEMA APLICAŢIILOR TEORIEI PROBABILITĂŢILOR

§ 1. Teorema lui Bernoulli

1. *Cîmpul de probabilitate elementar.* Să considerăm o experienţă E, care poate fi şi un proces elementar natural, al cărei rezultat este unul dintre evenimentele, în număr finit sau nu, ale unui cîmp de probabilitate, fiecare eveniment avînd o probabilitate determinată. Fie A unul dintre aceste evenimente şi p probabilitatea lui *presupusă diferită de zero.*

Vom numi *cîmp de probabilitate elementar* relativ la experienţa E — şi-l vom nota cu C_E — cîmpul constituit din evenimentele A, $A' = \text{non } A$, $\Omega = A \cup A'$ şi Φ, avînd probabilităţile respective $p, q = 1 - p$, 1 şi 0.

Experienţa repetată. Cîmpurile de probabilitate C_{E_n} şi C_{E_∞}. Presupunem că experienţa E_n, constînd din repetarea de n ori a experienţei E, are sens bine determinat.

Evenimentele elementare ale experienţei E_n sînt toate succesiunile

$$AAA'A\ldots A'$$

de evenimente A şi A' în număr total n.

Precizăm independenţa fiecăreia dintre experienţele E, considerînd că probabilitatea unui eveniment ca cel de mai sus este produsul probabilităţilor evenimentelor respective

$$ppqp\ldots q.$$

Construim cîmpul de probabilitate C_{E_n} cu evenimentele elementare

$$AAA'A\ldots A'\Omega\Omega\ldots, \tag{1}$$

unde succesiunea primilor n termeni reprezintă evenimentele elementare ale experienţei E_n pentru fiecare n.

Probabilitatea unui astfel de eveniment este aceeaşi cu a succesiunii primilor n termeni.

Evenimentele elementare corespunzătoare experienţei E_n constituie şi ele un cîmp C_{E_n}, care este un subcîmp de probabilitate al lui C_{E_∞}:

$$AAA'A\ldots$$

Un eveniment S_ν^n al cîmpului C_{E_∞}, astfel constituit, este mulţimea de succesiuni (1), în care A se prezintă de ν ori şi A' de $n-\nu$ ori. Probabilitatea acestui eveniment este, evident,

$$P(S_\nu^n)=C_n^\nu p^\nu q^{n-\nu}, \tag{2}$$

ν fiind frecvenţa absolută a evenimentului A în succesiunea respectivă.

După cum se verifică imediat, evenimentul S_ν^n cu probabilitate maximă (pentru n fix) este cel care corespunde frecvenţei absolute ν pentru care

$$\nu+1 \geqq p(n+1) \geqq \nu,$$

relaţie echivalentă cu

$$-q \leqq \nu-np \leqq p.$$

Frecvenţa absolută cu probabilitate maximă este deci întregul cuprins în intervalul $(pn-q, pn+q)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Teorema lui Bernoulli.* Considerînd frecvenţa ν_n ca o variabilă aleatorie pe $C_{E\infty}$, luînd valoarea zero pentru orice eveniment elementar corespunzînd unui şir de experienţe E_n, cu $n' \neq n$, obţinem imediat

$$M[\nu_n] = \sum_{\nu=0}^{n} \nu C_n^{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu} = np. \tag{3}$$

Caracterizăm evenimentele S_ν^n şi prin abaterea

$$\lambda = \nu - np,$$

scriind $S_{(\lambda)}^n = S_\nu^n$.

Introducînd această nouă variabilă, relaţia (2) se va scrie:

$$P(S_{(\lambda)}^n) = C_n^{\lambda+np} p^{\lambda+np} q^{nq-l}. \tag{4}$$

Folosind formula lui Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{\theta}{12n}\right) \qquad 0 < \theta < 1,$$

relaţia (4) devine:

$$P(S_\lambda^n) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\, npq}} \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{np}\right)^{np+\lambda+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{nq}\right)^{nq-\lambda+\frac{1}{2}}} \frac{1+\frac{\theta}{12n}}{\left(1+\frac{\theta'}{12\,(np+l)}\right)\left(1+\frac{\theta''}{12\,(nq-l)}\right)}.$$

Probabilitatea mulţimii de evenimente $S_{(\lambda)}^n$, a căror frecvenţă ν are o abatere λ cuprinsă într-un interval $-L$, $+L$, este suma

$$P_{(-L,\,L)}^{(n)} = \sum_{-L \leq \lambda \leq L} P(S_{(\lambda)}^n). \tag{6}$$

Pe de altă parte, după cum se vede din (5), fiecare dintre probabilităţile $P(S_{(\lambda)}^n)$ tinde către zero cînd n tinde către infinit, λ fiind fix.

Rezultă din (6) că

$$P_{(-L,\,L)}^{(n)} \to 0 \tag{7}$$

cînd $n \to \infty$. Această proprietate reprezintă

Prima parte a teoremei lui Bernoulli: Probabilitatea ca un şir să dea o frecvenţă absolută avînd o abatere mai mică în

Scanned with OKEN Scanner

valoare absolută decît un număr L, tinde către zero ca $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *cînd n tinde spre infinit.*

Această propoziţie, care în general trece nerelevată şi asupra căreia a atras atenţia în special *G. Castelnuovo*, se mai poate enunţa şi astfel:

Probabilitatea ca un şir să dea o frecvenţă absolută, a cărei abatere de la valoarea medie depăşeşte un număr dat L — oricît de mare — tinde către unu cînd n tinde către infinit.

A doua parte a teoremei lui Bernoulli rezultă din aplicarea directă a lemei lui Cebîşev, cu ajutorul căreia obţinem:

$$P\left\{S^n_{(\lambda)} \left| \left| \frac{\lambda}{n} \right| \leq \varepsilon \right.\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon}$$

sau încă

$$P\left\{S_\nu \left| \left| \frac{\nu}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right.\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon}. \qquad (7)$$

Inegalitatea (7) afirmă convergenţa în probabilitate a frecvenţei relative f_n către p.

Mai mult, după o teoremă a lui *Cantelli*, f_n converge tare către p. Putem deci enunţa teorema lui Bernoulli sub o formă întărită.

Pentru o succesiune de n experienţe independente între ele, pentru care evenimentul A are probabilitatea constantă p, frecvenţa teoretică f_n *converge tare către probabilitatea p cînd n tinde către infinit.*

Structura cîmpului C_{E_n} se regăseşte în structura cîmpului C_{E_∞} cînd n este mare: şirurile în care frecvenţa relativă $\frac{\nu}{n}$ are o valoare apropiată de p devin atunci predominante.

Cu alte cuvinte, tabloul complet al şirurilor de rezultate posibile, în experienţa E_n, *caracterizează structura cîmpului* C_E, *dacă n este suficient de mare,* în sensul că din acest tablou putem deduce probabilitatea p a evenimentului A, luînd drept valoare aproximativă a lui p, frecvenţa maximă, frecvenţa care se găseşte în cele mai multe serii.

Putem alege pe n suficient de mare pentru ca eroarea pe care o comitem astfel în evaluare lui p să fie oricît de mică voim.

3. *Comportarea asimptotică a frecvenţei reduse.* Teorema lui Bernoulli are un caracter pur teoretic ca şi cea care urmează şi care aprofundează încă analiza rezultatelor posibile ale şirului de experienţe repetate E_n.

Scanned with OKEN Scanner

Evaluarea probabilității ca *frecvența redusă* $\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{npq}} = \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}$ să fie cuprinsă într-un interval (x_1, x_2) este efectuată printr-un calcul direct, folosind relația (5), în volumul de Calculul probabilităților al lui G. Castelnuovo.

Noi vom urma aici calea mai rapidă, deși indirectă, care folosește funcția caracteristică.

Frecvența ν_n are funcția caracteristică

$$\varphi_n(\tau) = (pe^{i\tau\nu} + q)^n.$$

Rezultă că frecvența redusă α are ca funcție caracteristică

$$\varphi_n(\tau) = \left(pe^{iq\frac{\tau}{\sqrt{npq}}} + qe^{-ip\frac{\tau}{\sqrt{npq}}}\right)^n.$$

Folosim următoarele dezvoltări

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u = 1 - \frac{u^2}{2}\cos\theta' u + i\left(u - \frac{u^3}{3!}\cos\theta'' u\right),$$

cu $0 < \theta' < 1$, $0 < \theta'' < 1$.

Rezultă:

$$\psi_n(\tau) = \left[1 - \frac{a_n(\tau)}{n}\frac{\tau^2}{2} + i\frac{b_n(\tau)}{n\sqrt{n}}\tau^3\right]^n, \tag{8}$$

cu

$$a_n(\tau) = q\cos q\frac{\theta_1\tau}{\sqrt{npq}} + p\cos p\frac{\theta_2\tau}{\sqrt{npq}} = 1 - \frac{C_n(\tau)}{npq}\tau^2,$$

$$b_n(\tau) = \frac{1}{6\sqrt{pq}}\left(p^2\cos p\frac{\theta_3\tau}{\sqrt{npq}} - q^2\cos q\frac{\theta_4\tau}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Avem, evident,

$$0 \leq a_n \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad |C_n(\tau)| < 1,$$

$$|b_n(\tau)| \leq \frac{1}{6\sqrt{pq}}.$$

Presupunem

$$|\tau| \leq \sqrt{npq}; \tag{9}$$

atunci

$$\left| -\frac{a_n(\tau)}{n}\frac{\tau^2}{2} + i\frac{b_n(\tau)}{n\sqrt{n}}\tau^3 \right| < \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Putem deci efectua în condiția (9) calculele care urmează:

$$L\psi_n(\tau) = nL\sqrt{\left(1-\frac{a_n}{2n}\tau^2\right)^2 + \frac{b_n^2}{n^3}\tau^6} + in\omega_n,$$

unde

$$\omega_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n\tau^3}{n\sqrt{n}\left(1-\frac{a_n}{n}\frac{\tau^2}{2}\right)} = b_n'\frac{\tau^3}{n\sqrt{n}} \tag{11}$$

cu

$$|b_n'| < \frac{1}{6\sqrt{pq}}, \quad \frac{l_n'}{b_n} \to 1.$$

In același timp, printr-o evaluare analogă — dezvoltare în serie cu restul la termenul de primul ordin ($f(\tau) = f(0) + \tau f'(\theta\tau)$), obținem:

$$L\sqrt{\left(1-\frac{a_n}{n}\frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \frac{b_n^2}{n^3}\tau^6} = -\frac{a_n'}{n}\frac{\tau^2}{2} \tag{12}$$

cu

$$a_n' = a_n\frac{1-\frac{a_n}{4n}\tau^2 - \frac{b_n}{a_n n^2}\tau^4}{1+\theta\left(-\frac{a_n}{n}\tau^2 + \frac{a_n^2}{4n^2}\tau^4 + \frac{b_n}{n^3}\tau^6\right)}, \tag{13}$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n' = \lim_{n\to\infty} a_n = 1. \tag{14}$$

Prin urmare,

$$\psi_n(\tau) = e^{-a_n'\frac{\tau^2}{2} + i\frac{b_n'}{\sqrt{n}}\tau^3}. \tag{15}$$

Rezultă, astfel, pentru orice τ finit,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}.$$

De unde, folosind o teoremă bine cunoscută, obținem următoarea teoremă:

Abaterea redusă $\alpha_n = \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}$ *este, asimptotic, o variabilă gaussiană.*

Scanned with OKEN Scanner

Nu pentru acest caz particular al teoremei centrale a calculului probabilităţilor am făcut dezvoltările de mai sus, ci pentru evaluările care urmează şi care sînt specifice acestui caz particular.

Densitatea de repartiţie gaussiană corespunzătoare funcţiei caracteristice (15) este

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} e^{-i\tau x}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{16}$$

Dacă punem

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} e^{-i\tau x}\,d\tau+\varepsilon(x), \tag{17}$$

vom avea, de îndată ce $T>1$,

$$|\varepsilon(x)|<\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}T^2}. \tag{18}$$

In acelaşi timp, dacă

$$\eta_n(\tau)=e^{-\frac{1}{2}\tau^2}-\psi_n(\tau),$$

rezultă, ţinînd seamă de toate evaluările anterioare,

$$|\eta_n(\tau)|=\frac{d_n(\tau)}{\sqrt{n}}\tau^3 e^{-\frac{1}{2}\tau^2} \qquad |d_n(\tau)|\leq 1. \tag{19}$$

Prin urmare,

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\psi_n(\tau)\,e^{-i\tau x}\,d\tau+\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-T}^{T} d_n(\tau)\,\tau^3 e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\,d\tau+\varepsilon(x)$$

sau

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\psi_n(\tau)\,e^{-i\tau x}\,d\tau+\frac{e(T)}{\pi\sqrt{n}}+\varepsilon(x) \qquad [e(T)\leq 1]. \tag{20}$$

Fie acum $F_n(x)$ funcţia de repartiţie a frecvenţei reduse $\alpha_n=\frac{\nu_n-np}{\sqrt{npq}}$ şi două valori reale $x_i\,(i=1,2)$, astfel că

$$x_i\neq\alpha_n \quad (i=1,2;\ n>N \text{ oarecare}).$$

Vom putea atunci aplica formula care dă funcţia de repartiţie $F_n(x)$ cînd i se cunoaşte funcţia caracteristică.

Pentru aceasta, integrăm în ambii membri din (20) între x_1 şi x_2, ceea ce dă:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x_2}{2}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\psi_n(\tau)\,\frac{e^{-i\tau x_2}-e^{-i\tau x_1}}{-i\tau}\,d\tau + \frac{(x_2-x_1)\,\varepsilon(\tau)}{\pi\sqrt{n}} + \int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(x)\,dx.$$

Cînd T tinde către infinit, prima integrală din membrul al doilea tinde către $F_n(x_2) - F_n(x_1)$, iar din (18) rezultă:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\varepsilon(x)\,dx\right| < \frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}T^2}(x_2-x_1) \to 0.$$

Folosind notaţia $\Phi(x)$ pentru funcţia de repartiţie gaussiană, vom putea deci scrie

$$|\,\Phi(x_2) - \Phi(x_1) - [F_n(x_2) - F_n(x_1)]\,| \leq \frac{x_2-x_1}{\pi\sqrt{n}}$$

şi implicit

$$|\,\Phi(x) - \Phi(x_1) - [F_n(x) - F_n(x_1)]\,| \leq \frac{x-x_1}{\pi\sqrt{n}} < \frac{x_2-x_1}{\pi\sqrt{n}}, \qquad (21)$$

dacă $x_2 < x < x_1$.

Putem deci enunţa următoarea teoremă, care include, cum se verifică imediat, şi cele două părţi ale teoremei lui Bernoulli:

Teoremă. In orice interval finit, funcţia de repartiţie $F_n(\alpha)$ a frecvenţei reduse converge uniform către funcţia de repartiţie gaussiană, diferenţa între cele două repartiţii respectînd inegalitatea (21).

Observaţie importantă. Rezultatul acesta, mult mai complet decît acel dat de teorema lui Bernoulli, care indică numai „convergenţa în probabilitate" a frecvenţei f_n către p, nu trebuie să ne surprindă, deoarece am văzut că f_n converge tare — deci aproape peste tot — către p.

§ 2. Compararea rezultatelor empirice ale unei experienţe repetate cu cele teoretice

1. *Un postulat empiric.* Experienţa E nu pune în evidenţă, în mod direct, nici o mărime care să aibă semnificaţia structurală a probabilităţii. O probă ne dă un eveniment: A sau A'. Şirul de probe al experienţei repetate de n ori ne dă o frecvenţă absolută a (evenimentul A s-a produs în cele n probe de a ori).

Scanned with OKEN Scanner

Producerea evenimentului A în experiența E fiind aleatorie, o altă serie de n probe ne dă în genere o altă frecvență. Dacă facem N serii de cîte n probe, obținem mulțimea de N frecvențe:

$$a_1, a_2, \ldots, a_N, \tag{1}$$

$$(0 \leq a_j \leq n,\ j=1, 2, \ldots, N)$$

fiecare dintre frecvențe corespunzînd unei probe.

Caracterele proprii ale experienței E se relevă în constatarea care poate fi formulată astfel:

Distribuția valorilor șirului (1) *este aceeași ca a valorilor frecvențelor teoretice* $\nu=0, 1, 2, \ldots, n$.

Pentru a preciza enunțul acestui principiu, care pune de acord teoria cu experiența și, prin numeroasele sale verificări, poate fi considerat ca universal valabil, nu ne vom opri nici la frecvențele absolute a_j, nici la cele relative $\frac{a_j}{n}$, ci la frecvențele reduse

$$c_j = \frac{a_j - np}{\sqrt{npq}} \qquad (j=1, 2, \ldots, N), \tag{2}$$

a căror repartiție asimptotică este deosebit de caracteristică.

Ținînd seamă de teorema finală a paragrafului precedent, care afirmă că frecvențele reduse teoretice au, în orice interval finit, o repartiție asimptotică gaussiană, propoziția de mai sus capătă următoarea expresie:

Postulat. Dacă n *și* N *sînt suficient de mari, repartiția frecvențelor reduse este gaussiană* — cu valoarea medie nulă și dispersia egală cu unu.

Acest postulat este deci echivalent cu următoarea propoziție:

Frecvența urmează legea erorilor de observație.

Intrucît putem scrie

$$c_j = \frac{\frac{a_j}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \tag{3}$$

faptul că aceste valori au o distribuție gaussiană cu valoare medie nulă și dispersia egală cu unu ne arată că:

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția F. Frecvențele $\frac{a_j}{n}$ *pot fi considerate ca valorile observate ale mărimii structurale p.*

Postulatul formulat mai sus este o lege naturală de tip stochastic. Ea leagă într-o relație stochastică cele două mărimi: probabilitatea și frecvența. Cea dintîi ne dă o caracteristică structurală relativă la experiența elementară, iar ultima caracterizează rezultatele diferitelor sisteme de experiențe repetate.

Examenul statistic al abaterilor pe care datele experimentale le pot prezenta față de distribuția gaussiană teoretică, problema convergenței, cînd n variază, către această distribuție, în orice interval finit, sînt probleme tipice ale statisticii și, în speță, ale teoriei erorilor de observație.

2. *Despre valoarea lui p.* Din considerațiile precedente reținem pentru p două proprietăți:

a) p este valoarea medie a frecvenței teoretice relative:

$$p = M\left[\frac{\nu}{n}\right];$$

b) valoarea lui p este aproximată oricît de bine dorim de frecvența relativă cu frecvență maximă.

In baza postulatului vom avea, în același timp, cu aproximațiile îngăduite de teoria erorilor de observație, următoarele proprietăți cu caracter empiric:

1) p este valoarea medie a frecvenței $\frac{a_j}{n}$ $(j=1, 2, \ldots, N)$;

2) frecvența $\frac{a_j}{n}$, care are cea mai mare frecvență în șirul $\frac{a_1}{n}, \frac{a_2}{n}, \ldots, \frac{a_N}{n}$, este cea mai apropiată de p.

Ultima propoziție trebuie înțeleasă, în lumina teoremei fundamentale, astfel:

Să considerăm intervalul (0, 1) și să-l dividem în l segmente egale, afară doar de segmentele extreme care pot fi mai mici, l fiind astfel ales încît o evaluare a lui p cu mai puțin de $\frac{1}{l}$ să fie considerată drept bună. Ne aranjăm astfel ca p să fie centrul unuia dintre segmente.

Toate frecvențele $\frac{a_j}{n}$ care cad într-unul dintre segmente se vor reprezenta prin centrul segmentului. Punctul p va avea în această repartiție frecvența maximă.

Scanned with OKEN Scanner

Abaterile de la aceste rezultate nu trebuie să depăşească limitele îngăduite de statistica matematică.

3. *Compararea rezultatelor empirice cu cele teoretice.* Aşa cum s-a mai spus, experienţa nu pune în evidenţă în mod direct nici o mărime care să aibă semnificaţia structurală a probabilităţilor. Ea ne dă numai frecvenţe. Rezultatele experimentale sînt comparabile direct cu tabloul frecvenţelor posibile indicate în cercetarea teoretică anterioară.

Să considerăm N grupe de cîte n probe efectuate în condiţiile de la punctul 1. Presupunem N destul de mare şi numărul n al probelor din fiecare grup de asemenea destul de mare.

Fie $n_1, n_2, \ldots, n_N$ frecvenţele evenimentului A în grupele respective.

Experienţa se condensează în următoarea afirmaţie:

Frecvenţele empirice au aceeaşi repartiţie ca cele teoretice, care constituie postulatul empiric ce îngăduie transpunerea teoretică a experienţei.

Prin urmare, ţinînd seamă de rezultatele de mai sus, numerele $\frac{n_j - np}{\sqrt{npq}}$ $(j=1, 2, \ldots, N)$, cuprinse *într-un interval* $-a, +a$, *convenabil ales, au o repartiţie gaussiană.*

Ne asigurăm de faptul acesta în modul următor. Impărţim intervalul $-a, +a$ într-un număr impar convenabil ales de intervale egale: intervalul l_0 cu centrul în originea axelor, intervalele simetrice l_h, l_{-h} cu $h=1, 2, \ldots, k$.

Fie N_0 numărul valorilor $\frac{n_j - np}{\sqrt{npq}}$ cuprinse în l_0, N_h numărul celor cuprinse în l_h, iar N_{-h} numărul celor cuprinse în l_{-h}. Toate valorile cuprinse în l_0 le vom reprezenta prin valoarea 0, toate cele cuprinse în l_h prin abscisa mijlocului acestui segment; la fel pentru l_h.

Aceste valori cu frecvenţele lor N_h $(h=0, 1, 2, \ldots, k)$ *au deci o distribuţie aproximativ gaussiană.* Aproximaţia trebuie să fie, faţă cu n, de ordinul găsit în cercetarea teoretică.

Dacă n creşte, putem extinde şi intervalul $-a, +a$ în care se cercetează convenienţa reprezentării.

In aceste condiţii se poate determina valoarea lui p numai cu ajutorul frecvenţelor. Fie $p_0 = M\left[\frac{a_j}{n}\right]$.

O primă indicaţie că valoarea este bună rezultă din concordanţa valorilor date de 1 şi 2.

Scanned with OKEN Scanner

A doua indicaţie rezultă din faptul că $M\left[\left[\frac{a_f}{n}-p\right]^2\right]=\mu_0^2$ trebuie să fie practic egală cu np_0q_0.

Ultima indicaţie rezultă din caracterul distribuţiei valorilor

$$\gamma_f=\frac{\frac{a_f}{n}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}.$$

Dacă această distribuţie nu este gaussiană, în condiţii pe care statistica le precizează ca fiind caracteristice, experienţa nu îndeplineşte condiţiile de stabilitate pe care le-am presupus la baza consideraţiilor de mai sus.

Obiectivul nostru nu este de a intra în cercetarea statistică aprofundată a teoriei erorilor de observaţie sau, mai general, în teoria estimaţiei statistice.

De aceea ne-am mărginit la formularea propoziţiei F şi la interpretarea consecinţelor sale imediate.

§ 3. Experienţe tipice cu caracter stochastic

1. *Aruncarea „la întîmplare" cu banul sau cu zarul ca fapt experimental.* Aruncarea la întîmplare cu „banul" sau cu „zarul" sînt fapte de experienţă comună. Ele aparţin experienţei noastre curente şi deci intuiţiei noastre experimentale în aşa măsură, încît aproape orice om este în măsură să distingă aruncările „la întîmplare", de cele care sînt făcute cu o regulă care poate duce la prevederi, în fiecare caz în parte.

Nu este dar un procedeu neştiinţific cînd se vorbeşte în aplicaţiile teoriei probabilităţilor de „aruncarea la întîmplare cu banul sau cu zarul", fără a se preciza nimic altceva asupra acestor *experienţe tip*.

Asemenea experienţe ne dau modele pentru succesiuni de evenimente datorite întîmplării.

Diversele încercări de a da reguli pentru a reproduce şiruri cu succesiune întîmplătoare sînt sortite eşecului. Au arătat-o toţi cei care au căutat să formuleze „o regulă de joc" la ruletă, ca şi teoreticienii care au adîncit, în ultima vreme, problema selecţiei unui subşir infinit dintr-un şir infinit dat.

Singura regulă care ni se pare justificată este apelul la una dintre experienţele întîmplătoare tipice, în modul următor.

Fie

$$A, A', A', A, A, \ldots, A, A, A', \ldots \qquad (1)$$

succesiunea indefinită de evenimente alternative A sau A', reprezentînd feţele apărute într-un şir indefinit de „aruncări la întîmplare“ ale unui ban.

Vom selecta un subşir al şirului (1), fie dînd o regulă determinată *prin recurenţă* sau *nu*, de pildă o regulă de tipul lui A. Wald, fie folosind o succesiune de experienţe întîmplătoare.

Să folosim, de exemplu, o succesiune de aruncări la întîmplare cu banul; dacă la a n-a aruncare obţinem faţa A, păstrăm evenimentul al n-lea din şirul (1); dacă obţinem faţa A', lăsăm la o parte evenimentul de rangul n. Aceasta pentru fiecare n.

Regula de selecţie este în acest caz întîmplătoare.

Aruncarea la întîmplare cu „zarul“ ne dă de asemenea o regulă de selecţie.

Dacă la aruncarea a n-a iese faţa 1, păstrăm evenimentul de rangul n din şirul (1), iar dacă iese o altă faţă, trecem peste acest eveniment.

Astfel de reguli de selecţie pot fi şi succesiuni de evenimente dependente, constituind un lanţ aleator oarecare.

Se pune problema de a şti *dacă subşirul obţinut printr-o atare regulă de selecţie are aceeaşi structură aleatoare ca şirul dat* (1) *sau dacă în structura lui se resimte predominant structura procesului de selecţie.*

Nu vom da aici un răspuns direct şi general acestei probleme. Un răspuns parţial va fi obţinut în cele ce urmează.

2: *O caracterizare matematică a aruncării la întîmplare. Invarianţa faţă de un grup de permutări.* De îndată ce căutăm o precizare ştiinţifică a caracterelor experienţei, numită *aruncare la întîmplare* cu banul sau cu zarul, apar numeroase greutăţi. Unele privesc condiţiile de simetrie ale banului sau ale zarului. Odată împlinite aceste condiţii simple, apar greutăţile mari legate de complexitatea operaţiei mecanice de aruncare.

La un mecanism ca ruleta, operaţia mecanică este relativ simplă, aşa cum vom lămuri mai tîrziu. Mecanismul aruncării în aer a unui obiect ca moneda sau zarul este complicat, şi problemele noastre nu ar putea aştepta rezultatele, cu mult prea complicate ale studiului ecuaţiilor respective.

Dar nu avem nevoie de întreaga complexitate a mişcării, ci de cele două caracteristici esenţiale ale ei:

1°. Fiecare mişcare poate fi considerată ca o permutare a celor două feţe. Şirul de evenimente în succesiunea (1) de aruncări cu banul este deci un şir de permutări ale celor două feţe A şi A'.

Scanned with OKEN Scanner

2°. Mişcarea banului este independentă de caracterul special al celor două feţe.

In particular, deci, frecvenţa evenimentului A trebuie să rămînă asimptotic invariantă, dacă în şirul (1) facem o permutare între A şi A', ceea ce revine la a fi permutate, la un moment dat, culorile celor două feţe.

Aruncările la întîmplare ale banului au deci această caracteristică comună:

Frecvenţa celor două evenimente A şi A' este asimptotic aceeaşi în orice şir (1), rezultat al unei succesiuni de aruncări. Limita acestor frecvenţe este, deci, în sens probabilistic, $\frac{1}{2}$. In acelaşi timp, vom numi probabilitate a feţei A o valoare $f(A)$ cu proprietăţile

$$f(A)+f(A')=1,$$
$$f(A)=f(A'),$$

[$f(A)$ este independentă de culoarea feţei].

Deci, $f(A)=\frac{1}{2}$ este în acelaşi timp limita frecvenţei şi valoarea probabilităţii feţei A.

In cazul aruncării zarului, succesiunea evenimentelor este o succesiune de numere din sistemul 1, 2, 3, 4, 5, 6:

$$3, 1, 1, 6, 5, 6, 3, \ldots$$

In acest şir faţa 1 prezintă o frecvenţă $\frac{a_n}{n}$ pînă la rangul n, variind cu n.

Presupunînd că, în decursul operaţiilor de aruncare, eventual chiar la început, am efectuat o permutare a feţelor (a numerelor 1, 2, 3, 4, 5, 6), cerinţa este ca *frecvenţa* $\frac{a_n}{n}$, *pentru n suficient de mare, să nu se resimtă de permutarea efectuată.* Se cere implicit, ca cele şase feţe să aibă frecvenţe asimptotic egale. De aici, valoarea $\frac{1}{6}$ a acestei frecvenţe şi, ca şi mai sus, egalitatea acestei frecvenţe cu probabilitatea.

In amîndouă aceste cazuri, atît probabilitatea, ca valoare structurală, cît şi frecvenţa, ca mărime caracteristică a şirurilor rezultate din aruncarea la întîmplare, *sînt invariante pentru un grup de permutări.* Aceasta asigură şi egalitatea lor.

Constatînd aceasta, să adăugăm însă că nu am definit, în cele de mai sus, aruncarea la întîmplare a unui zar, ci doar

Scanned with OKEN Scanner

am constatat caracteristica acestei operații, suficientă pentru proprietățile frecvenței.

Evident că există și aruncări care nu sînt la întîmplare și care ne dau șiruri avînd aceeași invarianță, după cum există mișcări ergodice continue care nu verifică ecuații diferențiale dinamice.

Extracțiile la întîmplare dintr-o urnă conținînd bile care nu se diferențiază decît prin culoare, constituie categoria de experiențe de foarte largă generalitate, care includ și aruncarea zarului și a banului.

Dacă numărul bilelor de diferite culori este același, grupul care intervine este acela al permutării de atîtea obiecte cîte culori diferite există în urnă.

In cazul cel mai general, să presupunem că urna conține k_1 bile de culoare 1, k_2 bile de culoare 2, ..., k_l bile de culoarea l.

Numerotăm în acest caz toate bilele de la 1 la $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$.

Un șir de extracții la întîmplare este un șir constituit din numere de la 1 la k.

Frecvența unuia dintre aceste numere, a numărului 1 de exemplu, este asimptotic invariantă pentru orice permutare a celor k numere, în particular pentru permutările 1, h ($h=2, 3, \ldots, k$), celelalte rămînînd neschimbate. Aceasta arată că frecvența fiecăruia dintre cele k numere este asimptotic aceeași, deci egală cu $\frac{1}{k}$.

De aici deducem imediat că frecvența culorii 1 este $\frac{k_1}{k}$.

Aceeași analiză ca în cazul banului ne arată că valoarea structurală, invariantă pentru același grup de permutări, asociată extracției la întîmplare a unei bile, este $p_1=\frac{1}{k}$, deoarece trebuie să avem

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_k)$$

și, în același timp,

$$\sum_{j=1}^{k} P(A_j)=1.$$

De aici rezultă, pentru bilele de culoarea 1, probabilitatea $\frac{1}{k_1}$, iar pentru frecvența acestor bile valoarea asimptotică $\frac{1}{k}$, ținînd seamă că frecvența culorii 1 este suma frecvențelor bilelor respective.

§ 4. Convergența frecvenței către probabilitate pentru diferite mișcări

1. *Mișcări aleatorii, mișcări determinate.* Succesiunea evenimentelor A și A' în șirurile de tipul (1) § 3 are caracterul aleator. Ea se poate interpreta ca o mișcare aleatorie a unui punct care se găsește, în ordinea indicată de șir, cînd în partea A a spațiului S, cînd în complementara ei, probabilitatea de a se găsi în A fiind de fiecare dată p, probabilitatea de a se găsi în A' fiind $q=1-p$.

Trecerea de la un eveniment la altul interpretat ca mișcare a unui punct este modelul cel mai simplu de *mișcare browniană* în înțelesul cel mai pur: fiecare mișcare este independentă, nu numai de mișcările anterioare, dar și de poziția de la care pleacă. Acesta este modelul mișcării dezordonate în sensul cel mai complet.

O mișcare, de asemenea aleatorie, sau browniană, mai puțin dezordonată însă, este caracterizată prin probabilitățile de trecere $p_{A,A}$, $p_{A,A'}$, $p_{A',A}$, $p_{A',A'}$. Putem avea legături din ce în ce mai strînse, pînă la mișcarea determinată a unei particule care urmează legile mecanice.

Teorema ergodică, acum clasică, a lui Birkhof, reprezintă, într-o interpretare a ei simplă, convergența frecvenței către o valoare pe care sîntem îndreptățiți, cel puțin în anume cazuri, să o considerăm ca o probabilitate, deși introducerea noțiunii de probabilitate într-o astfel de mișcare nu este nici naturală nici necesară, decît dacă o privim ca un tip de mișcări aleatorii limită.

Pentru acest motiv enunțăm aici teorema ergodică, atît sub aspectul ei discontinuu, cît și sub acela continuu.

2. *Teorema ergodică a lui Birkhof.* Să considerăm un spațiu punctual S, pe care este determinat un corp K de părți și pentru fiecare parte care aparține lui K o măsură μ, finită sau nu, total aditivă.

Se consideră o transformare punctuală T, a cărei inversă T^{-1} există și conservă măsura oricărei mulțimi măsurabile.

Se consideră de asemenea o funcție reală $f(P)$.

Limita $\hat{f}(P)$ a valorii medii temporale

$$f_n(P)=\left\{\frac{1}{n}(f(P)+f(TP)+\ldots+f(T^{n-1}P))\right\},$$

cînd $n\to\infty$, există aproape pentru orice P. Această limită este finită sau infinită, este independentă de P cînd P variază pe o

parte metric indecompozabilă S', este invariantă pentru T, în înțelesul că

$$\lim_{n\to\infty} f_n(T^k P) = \lim f_n(P),$$

oricare este k, și egală cu valoarea medie a acestei funcții pe S':

$$\bar{f}(P) = \frac{1}{\mu(S')} \int_{S'} f(P)\,\mu(dP),$$

dacă $\mu(S')$ este finită.

In cap. IX am enunțat și demonstrat teorema ergodică a lui Birkhof pentru un grup abelian de transformări T_s.

Demonstrarea pentru teorema de mai sus se poate face în același mod.

Am dat această teoremă aici pentru a pune în evidență următoarea interpretare a ei:

Fie $A \in K$ și funcția $f(P)$ caracteristică acestei mulțimi:

$$f(P) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } P \in A, \\ 0 & \text{dacă } P \in \complement A. \end{cases}$$

In acest caz, $f_n(P)$ este frecvența relativă a evenimentului A în șirul $f(P)$, $f(TP)$.

Dacă presupunem că $S' = S$ este metric indecompozabilă și de măsură finită, atunci

$$\bar{f}(P) = \frac{1}{\mu(S)} \int_S f(P)\,\mu(dP) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}.$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(P) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)} = p_A,$$

în afară de o eventuală mulțime de puncte de măsură nulă. $p_A = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$ poate fi numită probabilitatea de prezență a lui P în A și are semnificația structurală care derivă din însăși definiția ei.

O teoremă analogă se găsește și în cazul grupului de transformări T_s. O proprietate caracteristică a $\lim f_n(P)$ de a fi invariantă pentru T aparține și valorii medii $p_A = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$, deoarece $\mu(TA) = \mu(A)$.

Regăsim, deci, toate caracteristicile relației dintre frecvență și probabilitate, puse în evidență în cazul mișcărilor aleatorii.

Din această teoremă rezultă că valoarea probabilității de prezență p_A sau probabilitatea evenimentului A, dată ca mărime

Scanned with OKEN Scanner

structurală, se poate obține ca „limita aproape peste tot" a frecvențelor de apariție a evenimentului A, într-un șir de probe care se pot considera ca etape, întîmplătoare—într-un eveniment esențial aleator—sau determinate, într-o mișcare supusă legilor dinamicii.

Se poate privi mișcarea determinată din punctul de vedere aleator în modul următor, curent în științele fizice și folosit în Mecanica statistică.

Se consideră concomitent mișcarea unei mulțimi de puncte P, aparținînd aceluiași spațiu S metric indecompozabil. Fie P_0 poziția la momentul $t=0$ a acestui punct și poziția sa $P_n = T^n P_0$ momentul $t=n$.

Să presupunem că din mulțimea punctelor P_0 o parte, pe care o numim A_0, se găsește în mulțimea A pentru fiecare A:

$$A_0 = \Phi(A) \qquad (A_0 \in A)$$

este o funcție de mulțime cu valori aparținînd de asemenea mulțimilor din K.

Distribuția limită a punctelor P_n este, potrivit teoremei ergodice, independentă de această distribuție inițială. Prin urmare, măsura relativă a mulțimii de puncte P_n care se găsesc în A, cînd $n \to \infty$, tinde către p_A, oricare ar fi fost măsura mulțimii acelor puncte care se găsesc inițial în A.

3. *Metoda funcțiilor arbitrare.* Consecințele de mai sus ale teoremei ergodice a lui Birkhof, ca și ale teoremelor ergodice asociate succesiunilor aleatorii de evenimente, arată independența distribuțiilor finale față de distribuția inițială, prin urmare față de funcția Φ, care are deci un mare grad de arbitrar.

Această observație este la baza considerațiilor lui H. Poincaré asupra problemei ruletei, precum și a studiului lui A. I. Hincin asupra definirii probabilității plecînd de la o distribuție arbitrară.

H. Poincaré a semnalat un procedeu de calcul al probabilității ca ruleta să se oprească la o anume culoare, în care se folosesc unele proprietăți generale ale funcției de repartiție, fără să le cunoaștem efectiv.

Iată modul de a proceda pentru a ajunge la acest rezultat.

Să presupunem că o roată, a cărei margine este divizată într-un număr de arce egale cu a, alternativ roșii și negre, are un mare număr de rotiri date de un impuls inițial. Fie

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(u)\, du$$

probabilitatea ca roata să se oprească după ce a făcut un unghi θ, cuprins între θ_1 și θ_2.

Este evident că legea de rotație în care se ține seamă de datele inițiale, precum și de frecările la care este supusă roata și care determină o oprire a ei, este deajuns de complicată pentru ca să putem afirma că $\rho(u)$ este cunoscută cu o precizie oricît de mare.

Vom presupune că știm numai că $\rho(u)$ este continuă și are o derivată mărginită

$$|\rho'(u)| < M;$$

vom ține seamă că nu cunoaștem nici poziția nici viteza inițială a roții și vom stabili totuși că probabilitatea ca roata să se oprească cu o diviziune roșie în fața indicatorului este $\frac{1}{2}$.

In adevăr, fie α unghiul maxim pe care-l poate face roata în învîrtirea ei, astfel că $0 \leq u \leq \alpha$...

Să presupunem că $\alpha = na$. Să considerăm două diviziuni succesive; diferența ariilor

$$\left| \int_{ka}^{(k+1)a} \rho(u)\,du - \int_{(k+1)a}^{(k+2)a} \rho(u)\,du \right|$$

este mai mică decît $a(\mu - \mu')$, unde μ este maximul lui $\rho(u)$ și μ' este minimul lui $\rho(u)$ în intervalul ka, $(k+2)a$. Dar

$$\mu - \mu' < 2M_a,$$

deci diferența de mai sus este mai mică decît $2Ma^2$.

Diferența totală între integralele relative la diviziunile roșii și integralele relative la diviziunile negre este mai mică decît

$$2Ma^2 \frac{n}{2} = M\frac{\alpha^2}{n},$$

prin urmare, α fiind dat, este oricît de mică voim o dată cu $\frac{1}{n}$.

Diferența între probabilitățile celor două culori este oricît de mică voim, deci fiecare este egală cu $\frac{1}{2}$.

Aceeași problemă se poate rezolva și în modul următor, ținînd seamă că diviziunile roții sînt date o dată pentru todeauna și că ceea ce asigură probabilitatea egală cu $\frac{1}{2}$ este numărul mare de rotiri.

Vom presupune că probabilitatea ca unghiul de rotire pînă la oprirea roţii să fie cuprins între θ_1 şi θ_2 este dat de

$$F(\theta_2)-F(\theta_1),$$

$F(\theta)$ fiind funcţia de repartiţie.

Această funcţie nedescrescătoare cu variaţie totală egală cu 1, *este* continuă, prin însuşi modul de construcţie al ruletei [nu există unghi pentru care $F(\theta)$ să fie discontinuă].

Să punem

$$\rho_s=F((2s+1)a)-F(2sa), \quad \nu_s=F((2s+2)a)-F((2s+1)a).$$

Probabilităţile ca ruleta să se oprească pe roşu sau pe negru vor fi deci, respectiv,

$$P_R=\sum_0^{n-1}{}_s\rho_s, \quad P_N=\sum_0^{n-1}{}_s\nu_s,$$

cu relaţiile

$$\rho_s\geqq 0, \quad \nu_s\geqq 0, \quad P_R+P_N=1.$$

Ultima relaţie se mai poate scrie:

$$\sum_0^{n-1}{}_s(\rho_s+\nu_s)=1.$$

Vom presupune, în corespondenţă cu această egalitate, că avem un baston de lungime 1, rupt în $2n$ bucăţi de lungimi diferite.

Să formăm în toate modurile posibile un grup cu n bucăţi. Care este probabilitatea ca lungimea totală a celor n bucăţi să fie $\frac{1}{2}$?

Valoarea medie a unei bucăţi este $\frac{1}{2n}$, deci valoarea medie a n bucăţi este $\frac{1}{2}$, care este şi valoarea probabilă a lungimii celor n bucăţi.

Aceasta înseamnă, potrivit cu teoremele precedente, că probabilitatea ca lungimea totală a celor n bucăţi să fie cuprinsă între $\frac{1}{2}-\epsilon$, $\frac{1}{2}+\epsilon$ tinde către 1, cînd numărul n al bucăţilor, deci numărul rotaţiilor, creşte indefinit.

Prin urmare, dacă alegem un grup de n bucăţi, la întîmplare, avem probabilitatea egală cu 1 ca lungimea celor n bucăţi să fie cît de vecină de $\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că, dacă alegem o funcție de repartiție continuă într-un interval suficient de mare θ_1, θ_2, sîntem aproape siguri că probabilitatea pe care o dă această funcție pentru oprirea pe roșu a ruletei este $\frac{1}{2}$.

Nu mergem mai departe cu această analiză, care a urmărit numai să arate în ce direcție pot fi în mod util îndreptate cercetările relative la ceea ce se numește metoda funcțiilor arbitrare.

BIBLIOGRAFIE

P. Laplace: Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812.

J. Bertrand: Calcul des probabilités, Paris, 1888.

H. Poincaré: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

A. Markov: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, 1912.

E. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, 1914.

F. P. Cantelli: Sulla legge dei grandi numeri, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, t. XI, fasc. VII, 1916.

F. P. Cantelli: La tendenza ad un limite nel senso del calcolo delle probabilità, Rund. Circolo Mat., t. XLI, Palermo, 1916.

F. P. Cantelli: Considérations sur la convergence dans le calcul des probabilités, Ann. del'Inst. H. Poincaré, t. 5, 1935.

C. Castelnuovo: Calcolo della probabilità, Roma, 1919.

E. Borel: Eléments de la théorie des probabilités, Gauthier Villars, Paris, 1924.

H. Steinhaus: Les probabilités dénombrables et leurs rapport à la théorie de la mesure, Fundamenta math., t. 4, 1922.

P. Lévy: Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1925.

R. de Mises: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Springer, Berlin, 1928.

A. Keynes: A treatise on Probability, Macmillan, Londra, 1930.

R. de Mises: Die Wahrscheinlitschkeirechnung und seine Anwendungen, 1931.

R. de Mises: La théorie des probabilités, Fondements et applications, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1932.

A. Kolmogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933.

E. Borel: La valeur pratique et la philosophie des probabilités, Gauthier-Villars, Paris.

E. Tornier: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, Leipzig, 1936.

B. de Finetti: La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, VII, 1938.

H. Reichenbach: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leyden, 1935.

J. L. Doob: Stochastic Processus depending on a continuons Parameter, Trans. of the Am. Math. Soc., 1937.

M. Fréchet: Traité de calcul des probabilités, vol. I et II, Gauthier-Villars Paris.

Scanned with OKEN Scanner

M. Fréchet: Les principaux courants dans l'évolution récente des recherches sur le calcul des probabilités, Les travaux du Colloque de Genève consacré à la théorie des probabilités, 1937, Actualités scientifiques, Hermann, 1938.

W. Feller; Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Москва, 1952.

Б. В. Гнеденко: Курс теории вероятностей, Москва, 1954.

O. Onicescu și *Gh. Mihoc:* Calculul probabilităților, București, 1939.

J. Ville: Étude critique de la notion de collectif, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

W. Feller: Sur les axiomes du calcul des probabilités et leurs relations avec l'expérience (vezi mai sus, Actualités scientifiques, Hermann, 1938).

R. de Mises: Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités (vezi mai sus, Actualités scientifiques, Hermann, 1938).

J. F. Steffensen: Fréquence et probabilité (vezi mai sus, Actualités scientifiques, Hermann, 1938).

A. Wald: Über die Widerspruchlesigkeit der Kollektiv Begriff (vezi mai sus Actualités scientifiques, Hermann, 1938).

W. Wiener: The homogeneous chaos, Ann. J. of Math, t. 60, 1938.

O. Onicescu: Definitia probabilității și problema ruletei, Buletinul științific Ac. R., t. XXI, 1939.

O. Onicescu: Probabilitatea unui eveniment izolat, Buletinul științific Ac. R, t. XXII, 1940.

H. Cramer: Mathematical method of statistics, Princeton Univ. Press., 1946.

C. T. Ionescu-Tulcea: Mesures dans les espaces produits, Rendiconti dell'Acad. dei Lincei, vol VII, fasc. 5, 1949.

G. Marinescu: O generalizare a noțiunii de variabilă aleatorie, Comunicările Ac. R.P.R., t. I, 1951.

N. Feller: An introduction to Probability Théory and its applications, New-York, 1950.

A. Blanc — Lapierre & R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.

Scanned with OKEN Scanner

CUVINT DE INCHEIERE

Această carte elementară privește Teoria probabilităților ca un instrument al științelor naturii, în special al științelor fizice. Chiar de la primele capitole s-au studiat, în legătură cu lanțurile de evenimente de tip Markov, anumite mișcări browniene simple precum și unele tipuri de reacțiuni în lanț pe care ni le pune la îndămînă Chimia. Capitolele speciale relative la Mecanica statistică clasică sau cuantică, capitolul relativ la mișcarea browniană, arată preocuparea fundamentală a cărții de a intra, prin intermediul conceptelor probabiliste, în miezul unor probleme fizice specific statistice.

Cetitorul familiarizat cu elementele Teoriei probabilităților, așa cum se găsesc, de pildă, în volumul cu acest titlu al lui Gh. Mihoc, apărut de curînd în Editura Tehnică, sau în volumul de colaborare a noastră apărut în 1939, îi recomandăm să înceapă lectura cu capitolul XIV, în care se lămurește legătura dintre conceptul de probabilitate și experiență și se precizează punctul de vedere al autorului în prezentarea diferitelor probleme întîlnite în carte.

In construcția acestei lucrări se resimte de la început locul central ocupat astăzi de procesele stochastice în Teoria probabilităților, care a încetat definitiv a fi precumpănitor statică, așa cum o prezentau tratatele cu care am început studiile noastre. Studiul proceselor stochastice este de fapt obiectul principal, chiar dacă nu totdeauna vizibil, al acestui volum și el justifică unele neevitabile considerații matematice, fără de care prezentarea ideilor ar fi neprecisă și deci inutilă celui care ar vrea să le folosească.

Am introdus astfel într-un capitol special procesele în lanț cu legături complete, datorite în primul rînd probabiliștilor ro-

Scanned with OKEN Scanner

mîni, deoarece, deşi mai puţin simple din punct de vedere matematic, încep a fi astăzi utilizate chiar în problemele, în aparenţă simple, cum este aceea a procesului de învăţare.

Ţin să mulţumesc cu acest prilej Editurii Tehnice pentru grija ce a purtat acestui volum cerut de ea, precum şi colaboratorilor mei R. Rodeanu, R. Teodorescu şi M. Stoka pentru ajutorul ce mi-au dat la revizie şi la corecturi.

OCTAV ONICESCU

Scanned with OKEN Scanner

INDEX ALFABETIC

A doua teoremă generală asupra extensiunii în fază 266
Abaterea medie pătratică 20, 118
Aditivitatea totală a măsurii 7
Argumentul funcției caracteristice 108
Avogadro, numărul ~ 329
Bayes, teorema ~ 16
Bernoulli, teorema ~ 361, 363, 364, 368
Bernstein, ecuațiile cu diferențe ~ 334
Birkhof, teorema ergodică ~ 251, 277, 376, 378
Bochner, teorema ~ 107, 110, 318
Boltzmann, constanta ~ 261
—, funcția H a lui ~ 258
—, teorema ~ asupra densității de repartiție după viteză a moleculelor unui gaz 254
—, teorema H a lui ~ 291
Boole, inegalitatea ~ 164
Borel, funcția măsurabilă ~ 97
Cantelli, teorema ~ 163, 364
Cauchy, funcția caracteristică ~ 126
Cebîșev, inegalitatea generalizată ~ 20, 164
—, teorema ~ 99, 159
Chandrasekar, mișcările browniene ~ 336
Chapman-Kolmogorov, ecuația ~ 222
Chapman, relația ~ 37, 240, 249
Charlier, dezvoltări de tip ~ 143, 144
Cîmp atomistic de evenimente 6
— de evenimente 3, 6, 95, 300
— — probabilitate 251, 252, 254, 268, 303, 304, 316
— — — canonic 251
— — — continuu 345
— — — elementar 361
Cîmp finit de evenimente 9
— — — probabilitate 8, 11, 12, 13
Cîmpuri microcanonice 251
Coeficient de conexiune 305, 306, 325
— — corelație 135, 202
Coeficientul de corelație a variabilelor 30
— — — internă 318
— — difuzie 329
— — precizie al repartiției 114
Completudinea spațiului 296
Componentele unui sistem dinamic 263, 264
— vectorului aleator 108
Conexiune 305, 307, 317, 318
Continuitate 304 ș. u.
Continuitatea funcțiilor aleatorii complexe 306, 307
— în probabilitate 304
— m. p. (în medie patratică) 304 ș. u. 315
Convergența aproape sigură (C_{as}) 149, 157
— B (în sensul Bernoulli) 148, 150, 151, 157, 174
— în medie 150, 157
— — probabilitate (C_p) 149, 151, 157,
— tare (C_t) 149, 157
Corelația între doi vectori 32
— — două variabile aleatorii 99
Corelație 29, 202, 210, 211
Corelații interne 34
Covarianța a două variabile 135
Cramer, teorema ~ 320
—, — ~ (referitoare la variabilele gaussiene) 171
Crofton, ecuația ~ 356
—, formula ~ (referitoare la un sistem echivalent de puncte) 354, 356
Curbe de regresiune 131, 132
— — — parabolică 134

Scanned with OKEN Scanner

Densitate de probabilitate 253
— — repartiție 104, 127, 253, 254
— — — a unui proces Markov omogen 231
— — — gaussiană 253, 367
— — — marginală 127
Derivabilitate stochastică 304 ș. u.
Derivata m. p. (în medie patratică) a unei funcții aleatorii 309 ș. u.
Desfaceri 10, 23, 24
Discontinuitatea funcției de repartiție 101
Dispersia energiei 269
— variabilei aleatorii 20, 99
Dispersie 307, 317
Distribuentă 272
Distribuția abaterilor urnei elementare 117
— binomială (urna lui Bernoulli) 117
— canonică 268, 286
— exponențială 115
— gaussiană 318, 371
— limită 167, 213
— medie clasică (statică) 289
— — dinamică 290
— microcanonică 273, 286, 287
— redusă a urnei elementare 117
— — limită a urnei lui Bernoulli 119
— stabilă 256
— urnei elementare 116
Domeniul de stabilitate al unui șir 158
Echipartiția energiei 258, 273
Echivalența asimptotică a două șiruri 158
Ecuația energiei 257
— funcțională a probabilității totale 84
Einstein, ecuația difuziei ~ 333
—, formula ~ (referitoare la mișcarea browniană) 329
—, relația ~ 331
—, repartiția ~ 261
— — Smoluhovschi, schema ~ (referitoare la mișcarea browniană) 336
Ergodicitatea globală a unui lanț 246
Eveniment imposibil 5, 9
— total (sigur) 4,9
Evenimente compatibile 10
— contrarii 9
— elementare ale unui cîmp 6, 9
— incompatibile 10
— rare dependente 204
— — independente 195
Extensiune în fază 266
Familie de funcții 303
— — lanțuri 49
Feller, proces de tip ~ 222
—, — finit de tip ~ 247
—, procese total discontinue de tip ~ 225
—, teorema ~ 178
Fermi, repartiția ~ 261
Fisher, repartiția ~ 147
Fokker-Planck, ecuația ~ 228, 333, 339, 340
Fokker-Planck-Kolmogorov, ecuația ~ 340
Forma canonică a repartițiilor limită 166
Fréchet M., teorema ~ 45
Frecvența redusă a unui eveniment oarecare dintr-un lanț Markov 191
Funcția caracteristică a repartiției lui Poisson 196
— — — unei variabile indefinit divizibile 169
— — — unui vector 102, 108
Funcția caracteristică a unui vector aleator 33
— — — variabilei aleatorii 19
— — — vitezei medii normate 293
— de repartiție 101, 110 ș. u. 126, 198, 207
— — — conjugată 103
— — — repartiție a unui vector 103
— vectorială generatoare a procesului omogen 57 ș u.
Functie aleatorie 70, 303 ș. u. 316 320, 332
— — continuă 308
— — cu creșteri independente 320, 334
— — omogenă 321
— caracteristică 104 ș. u. 169 ș. u. 207,
— de stare (de undă) 294, 295
— măsurabilă 303
— monotonă nedescrescătoare cu variație mărginită 318
— spectrală 319
Funcții de structură 275
— proprii 298
Funcțiile caracteristice ale frecvenței unui eveniment 186
Gauss, funcția de repartiție ~ 183
—, legea ~ 177, 191, 291
—, — ~ (referitoare la repartițiile limită) 164, 165, 171
Gibbs W., spațiul fazelor ~ 250

Scanned with OKEN Scanner

Gnedenko, evaluările asimptotice ~ 148
—, repartițiile ~ 191
—, teorema ~ (referitoare la variabilele de tip Poisson) 172
Helly, teorema ~ 102, 110, 168
Hermite, polinoamele 143
—, funcția de repartiție ~ 203
—, — — structură ~ 272
Hincin, teorema ~ 318
—, — ~ (referitoare la condițiile de stabilitate) 162
Hölder-Jensen, inegalitatea ~ 21
Ionescu C. Tulcea și Marinescu G., teorema ~ 90
Indecompozabilitate metrică 276
Independența desfacerilor 23 ș. u.
— evenimentelor 13 ș u.
— variabilelor aleatorii 23 ș. u. 99, 254
Integrala în probabilitate 311
— m. p. (în medie patratică) 311
— stochastică 311
Invariantii geometrici ai curgerii 262
— mișcării unui sistem dinamic 261
Iteratele operatorului T 187
Jacobi, ecuația ~ (asupra analogiei hidrodinamice) 267
Kolmogorov, ecuațiile diferențiale ~ 216
—, mecanica aleatorie ~ 338
—, procesele ~ 226
Koopman, funcțiile caracteristice ~ (pentru cazul unui lanț cu două evenimente) 213
Kronecker, simbolul ~ 236
Langevin, ecuația diferențială stochastică ~ (relativă la mișcarea browniană) 330
Lanț continuu cu legături complete la stînga 241
— de evenimente 35
— — variabile aleatorii 35
— dublu 331
— ergodic 44, 52, 83
— invers unui lanț dat 48
— la dreapta (drept) 241
— liniar (asociat) 241
— Markov, 34 ș. u. 212, 239 ș. u.
— — constant 46
Lanț Markov continuu 332, 336
— — cu evenimente rare 212
— — discontinuu 336
— — multiplu 35, 69, 72
— — omogen (permanent) 37
Lanț Markov periodic 46
— — simplu 35, 71, 212, 335
— — — constant 186
— omogen 237, 244
— stabil invariant 49
— — periodic 49
— variabil 81
Lanțuri cu legături complete 79 ș. u.
— — — — de ordinul al doilea 80 ș u.
Laplace-Cauchy, distribuție ~ 125
Laplace-Gauss, legea ~ 172
Lebesgue, integrala ~ 98, 103
—, măsura ~ a unor mulțimi 250, 255
Legea de repartiție a energiei într-un gaz ideal 252
— limită a frecvenței variabilei 176
— numerelor mari (teorema lui Bernoulli) 163
— tare a numerelor mari 163
Liapunov, teorema de convergență ~ 176, ș. u.
Liouville, teorema ~ 250
—, — ~ (asupra extensiei de fază) 265
Lindeberg, teorema de convergență ~ 177
Lipschitz, condiții de tip ~ 236
Loeve, teorema ~ 320
Matrice indecompozabilă 40
Maxwell, legea ~ 293
—, teorema ~ 252, 253
Maxwell-Boltzman, teorema ~ 252
Mărime asociată unui proces Markov omogen 231 ș. u.
Mărimi asociate cîmpului de evenimente 300
Măsura condiționată a evenimentelor unui cîmp 8
— evenimentelor unui cîmp 7
— finită a evenimentelor unui cîmp 7
Măsurabilitatea funcției aleatorii 97
Media repartiției marginale 129
Medie condiționată 130
— spațială 282
— temporală 282
Mersul la întîmplare 329, 336
Metoda funcțiilor arbitrare 378
Mihoc, funcțiile caracteristice ~ 212
—, teorema ~ 72
Mișcarea aleatorie 376
— browniană 33, 34, 228, 328 ș. u. 376
— determinată 376
Moivre-Laplace, teorema de convergență ~ 175

Scanned with OKEN Scanner

Momentul absolut al variabilei aleatorii 18
— repartiției normale 114
— unui vector 32 ș. u.
— variabilei aleatorii 18, 32, 99
Multiplicatori întregi 298
Mulțime boreliană 99, 252, 255
— măsurabilă Lebesgue 264
— uniform distribuită 287
Operatori diferențiali 297
— liniari autoadjuncți 295, 297 ș. u.
Pasul variabilei aleatorii 120
Pearson, distribuțiile ~ 145
Planck, constanta ~ 259
—, formula de repartiție ~ 261
—, legea de repartiție ~ 253 ș. u.
—, problema de repartiție ~ 258
Poincaré, teorema de recurență ~ 281
Poisson, distribuția ~ 119, 171, 324
—, legea ~ (referitoare la repartițiile limită) 165
—, repartiția ~ 119, 164,
—, variabila de tip ~ 171
—, — — — ~ generalizată 172
Polinoame ortogonale corespunzătoare unei repartiții 141
Polya, schema ~ 81
Probabilitate cinematică 360
— condiționată 13, 97, 283, 304
— de trecere 37
— gaussiană 345
— microcanonică 282, 283
Probabilitatea cîmpului de evenimente 7
— — finit de evenimente 10
Probabilitățile elementare (de trecere) ale unui lanț 70
— fundamentale ale unui lanț 70
Problema ergodică pentru sistemele indecompozabile 42
Proces aleator 228
— — în lanț continuu cu legături complete 236
— — liniar 239
— — staționar 316
— continuu cu o dimensiune 222 ș. u.
— de difuzie 228, 330
— discontinuu 340
Proces Markov 204
— omogen 221, 224
— staționar 317
— stochastic 70, 217, 237 244
— — discontinuu 75
— — ramificat 52, 62
— — — cu timp continuu 62
Procese cu o mulțime numărabilă de stări 221
Produsul intern al unei funcții aleatorii 313
Proprietățile ergodice ale unui lanț 242, 247
Puncte de creștere 141
Rayleigh, exemplul ~ 34
—, mișcarea ~ 45
Reacții în lanț 52 ș. u.
— — — concomitente 53
— — — cu absorbție 61
— — — succesive 53
Relația caracteristică a lanțului Markov simplu 35
— funcțională a lanțurilor cu legături complete 77
Repartiția energiei în spațiul fazelor 274
— — între oscilatori 259
— gaussiană (normală) 112, 172, 254, 290, 294, 333, 369, 371
— — cu două dimensiuni 136
— — — *n* dimensiuni 136, 139
— limită 164 ș. u, 191
— marginală relativă 127
— medie normală 290
— stabilă 256, 269
— vitezei medii normate 294
Repartiții conditionate 129
Repartiții indefinit divizibile 169
— — — cu mai multe dimensiuni 172
Reprezentarea armonică 314
— spectrală a unei funcții aleatorii 313, 314
Reversibilitatea procesului în lanț 48
— unui lanț Markov multiplu 72
Schwartz, inegalitatea ~ 23, 296, 307
—, lema ~ 306, 317
—, teorema ~ 305
Sistem canonic 263, 276
— de evenimente 40
— — — final 50
— — trecere 41, 42
— decompozabil 40, 41
— dinamic 263
— — ergodic 231
— ergodic 341
— final 41, 42
— indecompozabil 40, 41
— izolat (separat) 41, 42
— Kolmogorov pentru lanțuri Markov continui 237
— lacunar 241
— reversibil 341

Scanned with OKEN Scanner

Slutsky, criteriul ~ 149
Smoluhovski, ecuația ~ (relativă la mișcarea browniană) 329
Smoluhovski-Hostinski, ecuația ~ 338
— —, — funcțională ~ 231, 234
Spațiu Banach ~ 295
— Hilbert ~ 32, 295 ș. u.
Spațiul fază-timp 251, 288, 289, 290
Spectrul funcției aleatorii 319
— unui operator 299
Stabilitatea procesului în lanț 47 ș. u.
— — — — multiplu 72
Steinhaus, independențe ~ 100
—, teorema ~ 254
Stieltjes, integrala ~ 102, 103
Stirling, formula ~ 256, 260, 363
Stokes, teorema ~ 273
Student, repartiție ~ 148
Sub cîmp de probabilitate 12
Suspensie 329
Șir propriu stabil 158, 159
Șirul sumelor partiale 173
Teorema acului 353
— de inversiune 111
— — stabilitate proprie a frecvenței 163
— ergodică clasică 281
— — redusă 277, 281, 282
— limită pentru sume de mărimi vectoriale (în mecanica statistică) 183
Teoria bernoulliană a probabilităților 344
Timp continuu 252
— spectral 252
Uhlenbeck-Ornstein, procedeul de integrare ~ 332
— —, schema ~ (referitoare la mișcarea browniană) 336
Urna lui Bernoulli (distribuția binomială) 117
Valoare medie 202, 231
Valoarea medie a energiei 269
— —. — unui produs de variabile aleatorii independente 29
— — — variabilei aleatorii 17 ș. u, 97.101
Valorile proprii ale unui operator 298
Variabila gaussiană 173, 254, 337, 366
Variabila gaussiană generalizată 171
— normală 324
Variabile aleatorii 16 ș. u. 97 ș. u 154, 155, 186, 269, 277, 282, 303 ș. u. 315, 319, 341, 358
— — cu valori întregi 120
— — dependente 29
— — independente 25 ș. u. 191
— — mărginite 277
— — vectoriale 31
— — — cu coordonate întregi 121
— echivalente 154
— indefinit divizibile 169, 321
— vectoriale 181
Variantele a două variabile 135
Variatia repartitiei marginale 135
Varietate ergodică 232
— metric idecompozabilă 279 ș. u.
Vectori aleatori 31
— — independenți 32
— întregi independenti 193
Viteză medie normată 293
Wiener, integrala ~ pentru funcția continuă 335
Wiener-Doob, procesul cu creșteri independente ~ 334, 340

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Pag.

Cap. I. **Cîmp de evenimente, măsură şi probabilitate** . . . 3
§ 1. Cîmp de evenimente 3
§ 2. Măsura şi probabilitatea evenimentelor unui cîmp . . . 7

Cap. II. **Cîmp finit de probabilitate** 8
§ 1. Definiţii 9
§ 2. Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente . . 13
§ 3. Variabile aleatorii 16
§ 4. Desfaceri şi variabile aleatorii independente . . . 23
§ 5. Variabile aleatorii dependente. Corelaţie 29
§ 6. Variabile aleatorii vectoriale pe un cîmp finit . . . 31
§ 7. Mişcări browniene şi lanţuri de evenimente de tip Markov 34
§ 8. Reversibilitatea şi stabilitatea procesului în lanţ . . . 47
§ 9. Reacţii în lanţ 52
§ 10. Procese stochastice ramificate 62
§ 11. Lanţuri multiple 69
§ 12. Reversibilitatea şi stabilitatea proceselor în lanţ multiplu. Teorema lui Mihoc 72
Bibliografie 74

Cap. III. **Lanţuri cu legături complete** 75
§ 1. Lanţuri oarecare. Spaţiul lanţurilor. Evenimente şi probabilităţi elementare 75
§ 2. Modele de lanţuri cu legături complete 79
§ 3. Lanţuri cu legături complete ale schemelor de contagiune . 81
§ 4. Proprietăţile ergodice ale lanţurilor cu legături complete . 83
§ 5. Condiţiile de ergodicitate ale lui C. Ionescu-Tulcea şi Gh. Marinescu 90
§ 6. Corespondenţa între un lanţ cu legături complete şi un lanţ Markov 93
Bibliografie 95

Cap. IV. **Cîmp infinit de probabilitate** 95
§ 1. Definiţii 95
§ 2. Variabile aleatorii. Valori medii 97
§ 3. Funcţia de repartiţie 101
§ 4. Funcţia caracteristică 104
§ 5. Relaţiile între funcţiile de repartiţie şi funcţia caracteristică 110
§ 6. Tipuri de repartiţii cu întrebuinţare curentă 112

Scanned with OKEN Scanner

§ 7. Distribuții discontinue simple 116
§ 8. Alte repartiții 122
§ 9. Repartiții cu două dimensiuni 126
§ 10. Repartiția gaussiană cu n dimensiuni 136
§ 11. Reprezentarea repartițiilor cu o dimensiune 141
§ 12. Distribuțiile lui Pearson 145
§ 13. Tipuri de convergență ale șirurilor de variabile aleatorii . 148
§ 14. Echivalența asimptotică și stabilitatea șirurilor . . . 158
§ 15. Legea numerelor mari 163

Cap. V. Repartiții limită 164
§ 1. Forma canonică a repartițiilor limită 166
§ 2. Repartițiile indefinit divizibile 169

Cap. VI. Legea lui Laplace-Gauss 172
§ 1. Problema clasică în forma generală 173
§ 2. Teoreme de convergență 175
§ 3. O teoremă limită pentru variabile vectoriale . . . 181
§ 4. Legi limită pentru frecvența unui eveniment într-un lanț Markov constant 186
§ 5. Repartițiile lui Gnedenko 191
Bibliografie 194

Cap. VII. Repartiții Poisson 195
§ 1. Evenimente rare independente 195
§ 2. Repartiția frecvențelor rare a mai multor evenimente elementare 198
§ 3. O generalizare a procesului Poisson 203
§ 4. Evenimente rare dependente. Cazul unei singure frecvențe 204
§ 5. Cazul mai multor frecvențe 210
§ 6. Probabilitățile limită ale unui proces Markov cu evenimente rare. Funcțiile caracteristice ale lui Mihoc . . 212
Bibliografie 214

Cap. VIII. Procese stochastice de propagare în timp continuu. Teoria analitică 215
§ 1. Procese cu un număr finit sau numărabil de stări . . 215
§ 2. Procese continue cu o dimensiune. Procesele lui W. Feller 222
§ 3. Evoluția unei mărimi asociată unui proces Markov omogen 231
§ 4. Procese aleatorii în lanț continuu cu legături complete . 236
Bibliografie 250

Cap. IX. Probabilizarea evenimentelor în Mecanica Statistică . . 250
§ 1. Legea de repartiție a energiei într-un gaz ideal . . . 252
§ 2. Legea de repartiție a lui Planck 258
§ 3. Fundarea probabilistă a Mecanicii Statistice . . . 261

Cap. X. Cîmpuri de evenimente probabilizate în Mecanica cuantică 294
§ 1. Spațiul hilbertian al funcțiilor de stare 295
§ 2. Evenimente. Probabilitate. Legi de repartiție . . . 300
Bibliografie 302

Cap. XI. Funcții aleatorii 303
§ 1. Generalități despre functiile aleatorii 303
§ 2. Continuitate și derivabilitate stochastică 304
§ 3. Procese staționare 316

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Funcții aleatorii cu creșteri independente 320
Bibliografie 327

ap. XII. **Mișcarea browniană** 323
Bibliografie 343

Cap. XIII. **Cîmpuri geometrice de probabilitate și aplicații la optica geometrică și cinematică** 344
§ 1. Probabilități continue 335
§ 2. Măsura invariantă pentru mulțimea de drepte ale planului . 351
§ 3. Sisteme de puncte 354
§ 4. Aplicații 359
Bibliografie 361

Cap. XIV. **Teorema numerelor mari și problema aplicațiilor teoriei probabilităților** 361
§ 1. Teorema lui Bernoulli 361
§ 2. Compararea rezultatelor empirice ale unei experiențe repetate pe cale teoretică 368
§ 3. Experiențe tipice cu caracter stochastic 372
§ 4. Convergența frecvenței către probabilitate pentru diferite mișcări 376
Bibliografie 381
Cuvînt de încheiere 383
Index alfabetic 385

T. 968

Recenzent: conf. ing. Sergiescu Viorel
Control științific: Prof. Mihoc Gh., membru corespondent al Acad. R.P.R.

Responsabil de carte: Neicov Valentina
Tehnoredactor: Bălăiță Titel
Corector responsabil: Niga Elena

Dat la cules: 02.02.56. Bun de tipar: 16.04.56. Hîrtie: cărți școlare de 65 g/m², 61×86/16. Coli editoriale: 21,33. Coli de tipar 24,50. Comanda PS 2775. A. 06625.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 519.2.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 519.

Tiparul executat sub comanda nr. 469 la Intreprinderea Poligrafică Timișoara, str. Popa Șapcă 8. — R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner

E R A T Ă

Pag.:	Rîndul:	In loc de:	Se va citi:	Din vina:
56	14 jos	$P_{1,(3,0,0)}(1)$	$P_{1,(1,0,0)}(1)$	Tipografiei
131	17 sus	$dF[x, h(x)]\, d_x F(y, x) =$	$dF[x, h(x)]\, d_x F(y \mid x) =$	Editurii
199	4 sus	$\cap E^{t, t+\Delta}_{m_1+k_1,\, m_2-k_2}\Big)$	$\cap E^{t, t+\Delta}_{m_1-k_1,\, m_2-k_2}\Big)$	„
201	4 sus	$= \varphi(0)\, e^{-\int_0^t [\ldots]\, dt}$.	$= \varphi(0)\, e^{-\int_0^t [\ldots]\, ds}$.	„
292	6 jos	$M[[h_r+h_{r+1}-M[h_r+h_{r+1}]]]^2=\nu^2,$	$M[(h_r+h_{r+1}-M[h_r+h_{r+1}])^2]=\nu^2,$	„
307	9 jos	$\leq \{M[(x_t-x_{t_0})^2]\, M[y_t-y_{t_0}]\}^{\frac{1}{2}},$	$\leq \{M[(x_t-x_{t_0})^2]\, M[(y_t-y_{t_0})^2]\}^{\frac{1}{2}},$	„
338	7 jos	$= \int_S \rho(s, x; t, A)\, dx,$	$= \int_A \rho(s, x; t, y)\, dy,$	„
353	11 sus	$2R(> e)$	$2R(> l)$	Tipografiei

Scanned with OKEN Scanner